UO‘K 539.3

QOVUSHQOQ-ELASTIK QOBIQLARNING PARAMETRIK TEBRANISHLARI VA TURG‘UNLIGI

Esanov Nuriddin Qurbonovich,
Osiyo xalqaro universiteti dotsenti
esanovnuriddin@oxu.uz

Annotatsiya. *Maqolada qovushqoq-elastik qobiqlarning vaqt bo‘yicha davriy o‘zgaruvchi yuk ta’siridagi parametrik tebranishlari va dinamik turg‘unligi tadqiq etiladi. Qobiqning ko‘ndalang harakati moddalar bo‘yicha yoyilib, Galyorkin usuli yordamida modal integro-differensial tenglamaga keltiriladi. Matyerialning irsiy xususiyatlari Boltsman–Volterra prinsipi asosida hisobga olinadi. Garmonik parametrik qo‘zg‘atish holida tenglama so‘nishga ega Xill va Matye tenglamalari ko‘rinishida tahlil qilinadi. O‘rtachalash usuli asosida asosiy parametrik rezonans sohasi, turg‘unlik chegarasi va kritik parametrik amplituda aniqlanadi. Shuningdek, Floke nazariyasi va monodromiya matritsasi orqali turg‘unlik mezoni bayon qilinadi. Natijalar qovushqoqlik va energiya dissipatsiyasining ortishi kritik qo‘zg‘atish amplitudasini oshirib, parametrik noturg‘unlik sohasini toraytirishi hamda konstruksiyaning dinamik turg‘unligini yaxshilashini ko‘rsatadi.*

Kalit so‘zlar: *qovushqoq-elastik qobiq, parametrik tebranish, dinamik turg‘unlik, parametrik rezonans, dempferlash, integro-differensial tenglama, Floke nazariyasi, monodromiya matritsasi.*

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Аннотация. *В статье исследуются параметрические колебания и динамическая устойчивость вязкоупругих оболочек при действии периодически изменяющейся во времени нагрузки. Поперечное движение оболочки разлагается по формам собственных колебаний и с помощью метода Галёркина сводится к модальному интегро-дифференциальному уравнению. Наследственные свойства материала учитываются на основе принципа Больцмана–Вольтерры. При гармоническом параметрическом возбуждении уравнение анализируется в форме уравнений Хилла и Матье с затуханием. Методом усреднения определяются область основного параметрического резонанса, граница устойчивости и критическая амплитуда параметрического воздействия. Кроме того, критерий устойчивости формулируется на основе теории Флоке и матрицы монодромии. Полученные соотношения показывают, что увеличение вязкости и диссипации энергии повышает критическую амплитуду возбуждения, сужает область параметрической неустойчивости и способствует повышению динамической устойчивости конструкции.*

Ключевые слова: *вязкоупругая оболочка, параметрические колебания, динамическая устойчивость, параметрический резонанс, демпфирование, интегро-дифференциальное уравнение, теория Флоке, матрица монодромии.*

PARAMETRIC OSCILLATIONS AND STABILITY OF VISCOELASTIC SHEETS

Abstract. *The paper investigates parametric vibrations and dynamic stability of viscoelastic shells subjected to time-periodic loading. The transverse motion of the shell is expanded in natural vibration modes and reduced, by means of the Galerkin method, to a modal integro-differential equation. The hereditary properties of the material are incorporated using the Boltzmann–Volterra principle. Under harmonic parametric excitation, the governing equation is analyzed in the form of damped Hill and Mathieu equations. The averaging method is employed to determine the principal parametric resonance region, the stability boundary, and the critical parametric excitation amplitude. In addition, the stability criterion is formulated using Floquet theory and the monodromy matrix. The obtained relations show that increasing viscosity and energy dissipation raises the critical excitation amplitude, narrows the parametric instability region, and improves the dynamic stability of the structure.*

Keywords: *viscoelastic shell, parametric vibration, dynamic stability, parametric resonance, damping, integro-differential equation, Floquet theory, monodromy matrix.*

Kirish. Qovushqoq-elastik qobiqlarning parametrik tebranishlari masalasida asosiy maqsad - vaqt bo‘yicha davriy ravishda o‘zgaruvchi yuk ta’sirida konstruksiyaning dinamik turg‘unlik sohalarini, parametrik rezonans chegaralarini va kritik qo‘zg‘atish amplitudalarini aniqlashdan iborat.

Qobiqning o‘rta sirtidagi ichki kuchlarni

$$N_j(t) = N_{j0} - N_{j1}\varphi(t), \qquad j = 1,2 \quad (1)$$

ko‘rinishida qabul qilamiz. Bunda N_{j0} – kuchning doimiy tashkil etuvchisi, N_{j1} – parametrik ta’sir amplitudasi, $\varphi(t)$ esa

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) \quad (2)$$

shartni qanoatlantiruvchi (T)-davrli funksiyadir. Garmonik qo‘zg‘atish uchun

$$\varphi(t) = \cos\theta t \quad (3)$$

bu yerda θ – tashqi parametrik ta’sirning burchak chastotasi.

2. Qobiq harakatining umumiy tenglamasi

Qobiqning ko‘ndalang ko‘chishini modalar bo‘yicha

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) W_{mn}(x,y) \quad (4)$$

ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Bu yerda $W_{mn}(x,y)$ – qobiqning xususiy tebranish shakllari, $q_{mn}(t)$ – vaqtga bog‘liq modal koordinatalar. Galyorkin usuli qo‘llanilganda har bir moda uchun umumlashgan harakat tenglamasi

$$\begin{cases} M_{mn}\ddot{q}_{mn} + \int_0^t C_{mn}(t-\tau)\dot{q}_{mn}(\tau)d\tau + \left[K_{mn} - N_{10}K_{g1} - N_{20}K_{g2}\right]q_{mn} + \\ + \left[N_{11}K_{g1} + N_{21}K_{g2}\right]\varphi(t)q_{mn} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ko‘rinishiga keladi. Bu yerda M_{mn} – modal massa, K_{mn} – elastik qattiqlik, K_{g1}, K_{g2} – geometrik qattiqlik koeffitsiyentlari, $C_{mn}(t)$ – esa materialning qovushqoq-elastik xususiyatlarini hisobga oluvchi irsiy yadrodir.

Tenglamani M_{mn} ga bo‘lib,

$$\begin{cases} \omega_{mn}^2 = \dfrac{K_{mn} - N_{10}K_{g1} - N_{20}K_{g2}}{M_{mn}} \\ \mu_{mn} = \dfrac{N_{11}K_{g1} + N_{21}K_{g2}}{M_{mn}} \end{cases}, \quad (6)$$ belgilashlarni kiritsak,

$$\ddot{q}_{mn} + \omega_{mn}^2 q_{mn} + \mu_{mn}\varphi(t)q_{mn} + \int_0^t R_{mn}(t-\tau)q_{mn}(\tau)d\tau = 0 \quad (7)$$

(7) tenglama hosil bo‘ladi. Qovushqoq-elastik materialda kuchlanish faqat joriy deformatsiyaga emas, balki deformatsiyaning oldingi tarixiga ham bog‘liq bo‘ladi.

3. Boltsman–Volterra prinsipi va konstitutiv munosabatlar

Boltsman–Volterra prinsipiga asosan bir o‘lchovli holat uchun

$$\sigma(t) = E_0\left[\varepsilon(t) - \int_0^t R_E(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau\right] \quad (8)$$

deb yozish mumkin.

Bunda E_0 – oniy Yung moduli, R_E – relaksatsiya yadrosi.Siljish deformatsiyalari uchun xuddi shunday

$$\tau(t) = G_0\left[\gamma(t) - \int_0^t R_G(t-\tau)\gamma(\tau)d\tau\right] \quad (9)$$

Izotrop qovushqoq-elastik materialda hajmiy va siljish modullarining vaqtga bog‘liqligi Puasson koeffitsiyentining ham vaqtga bog‘liq bo‘lishiga olib keladi. Laplas sohasida

$$\bar{\nu}(s)=\frac{3\bar{K}(s)-2\bar{G}(s)}{2\left[3\bar{K}(s)+\bar{G}(s)\right]} \quad (10)$$

bunda $\bar{K}(s)-$hajmiy modulning, $\bar{G}(s)-$esa siljish modulining operator ko‘rinishlari. Shu sababli umumiy holda $\nu=\nu(t)$ deb qarash fizik nuqtai nazardan asosli hisoblanadi.

4. Integro-differensial tenglama

Qobiqning fazoviy koordinatalar bo‘yicha masalasi o‘zgaruvchilarni ajratish va qovushqoq-elastik moslik prinsipidan foydalanish orqali vaqtga nisbatan integro-differensial tenglamaga keltiriladi:

$$\ddot{f}+2\alpha\dot{f}+\left[\omega^2+\mu\varphi(t)\right]f+2\alpha\mu\int_0^t\Phi(t-\tau)\varphi(\tau)f(\tau)d\tau=0 \quad (11)$$

bunda $\alpha>0-$ekvivalent so‘nish koeffitsiyenti;

$\omega-$qovushqoq-elastik qobiqning samarali xususiy chastotasi;

$\mu-$parametrik ta’sir intensivligi;

$\Phi-$materialning irsiy xususiyatlarini ifodalovchi funksiya.

$2\alpha\mu\int_0^t\Phi(t-\tau)\varphi(\tau)f(\tau)d\tau$ (12) had kichik bo‘lsa, birinchi yaqinlashishda

$\ddot{f}+2\alpha\dot{f}+\left[\omega^2+\mu\varphi(t)\right]f=0$ (13) tenglama hosil bo‘ladi. Bu so‘nishga ega Xill tenglamasidir.

5. Garmonik parametrik qo‘zg‘atish

Agar $\varphi(t)=\cos(\theta t)$ bo‘lsa $\ddot{f}+2\alpha\dot{f}+\left[\omega^2+\mu\cos(\theta t)\right]f=0$ (14)

O‘lchamsiz parametrik amplitudani $h=\frac{\mu}{\omega^2}$ (15)deb belgilasak,

$\ddot{f}+2\alpha\dot{f}+\omega^2\left[1+h\cos(\theta t)\right]f=0$ (16) ko‘rinishdagi so‘nishli Mate tenglamasi olinadi.

Dempfirlashning o‘lchamsiz koeffitsiyenti $\zeta=\frac{\alpha}{\omega}$ (18)deb qabul qilinadi.

6. Asosiy parametrik rezonans

Parametrik rezonansning eng xavfli birinchi sohasi

Asosiy parametrik rezonans sharti: $\theta\approx 2\omega$ (19) shart bajarilganda yuzaga keladi.

Normallashtirilgan chastota $r=\frac{\theta}{2\omega}$ (20) deb olinsa, asosiy rezonans r=1 nuqta atrofida joylashadi. Yechimni sekin o‘zgaruvchi amplitudalar yordamida

$$f(t)=A(t)\cos\frac{\theta t}{2}+B(t)\sin\frac{\theta t}{2} \quad (21)$$ ko‘rinishida qidiramiz.

O‘rtachalash usuli natijasida o‘sish yoki so‘nishni xarakterlovchi xarakteristik ko‘rsatkichlar birinchi yaqinlashishda Xarakteristik ko‘rsatkichlar $\frac{\lambda_{\pm}}{\omega}=-\zeta\pm\sqrt{\left(\frac{h}{4}\right)^2-(r-1)^2}$ (22) ko‘rinishida olinadi.

Agar $\mathrm{Re}\,\lambda_+>0$ (23) bo‘lsa, tebranish amplitudasi vaqt bo‘yicha o‘sadi va sistema dinamik noturg‘un bo‘ladi.

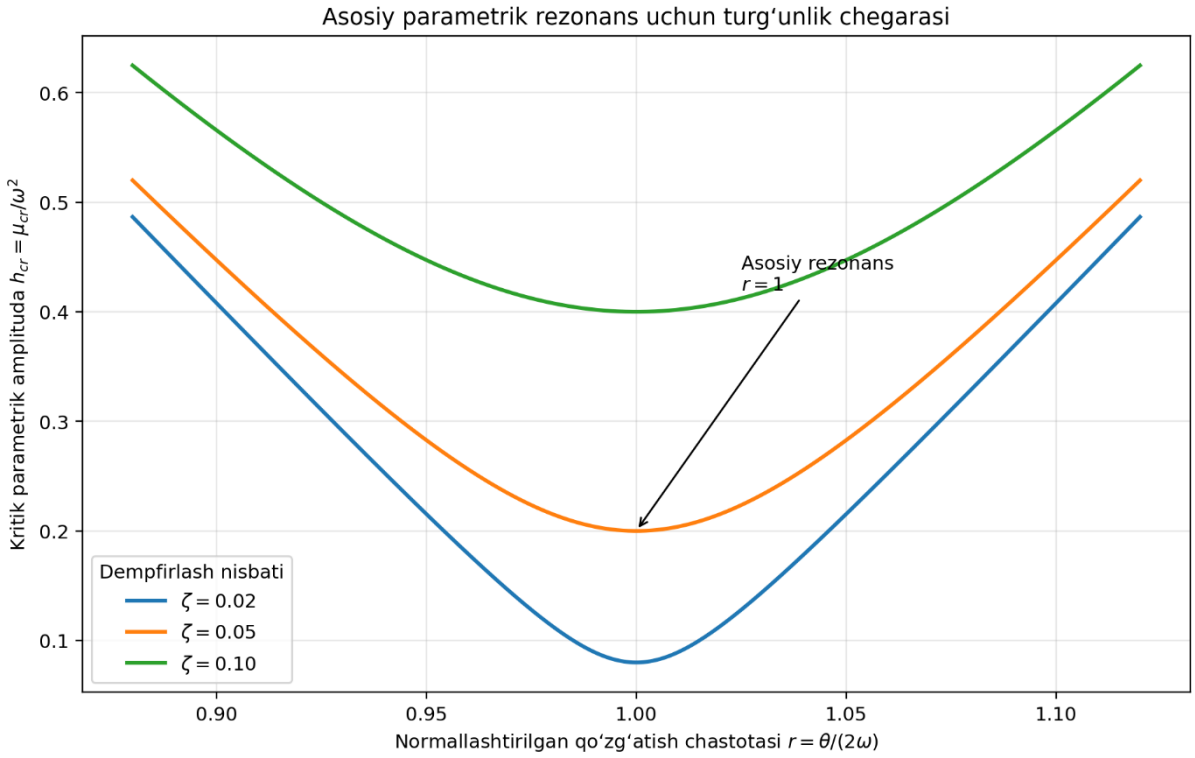
7. Turg‘unlikning kritik sharti

Noturg‘unlik paydo bo‘lishi uchun Noturg‘unlik sharti $\left(\frac{h}{4}\right)^2 > \zeta^2 + (r-1)^2$ (23) bajarilishi kerak. Bundan $\left(\frac{h}{4}\right)^2 > \zeta^2 + (r-1)^2$ (24) kelib chiqadi. Demak, turg‘unlik chegarasi

Kritik parametrik amplituda $h_{cr} = 4\sqrt{\zeta^2 + (r-1)^2}$ (25)bilan aniqlanadi. Aslida

$$h = \frac{\mu}{\omega^2}, \qquad r = \frac{\theta}{2\omega}, \qquad \zeta = \frac{\alpha}{\omega} \text{ (26)}$$

bo‘lgani uchun, o‘lchamli ko‘rinishidagi $\mu_{cr} = 4\omega^2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{2\omega} - 1\right)^2}$ (27) ifoda hosil bo‘ladi. Bu parametrik tebranishlarning muhim natijalaridan biridir.



1-rasm. Turli dempfirlash koeffitsiyentlarida asosiy parametrik rezonans uchun dinamik turg‘unlik chegaralari. Dempfirlash ortishi bilan kritik parametrik ta’sir amplitudasi ortadi va noturg‘unlik sohasi qisqaradi

ζ – dempfirlash nisbati. Dempfirlash ortishi bilan egri chiziq yuqoriga ko‘tariladi. Bu esa sistema noturg‘un holatga o‘tishi uchun kattaroq parametrik ta’sir talab qilinishini anglatadi.

Egri chiziqlarning eng past nuqtasi r=1 atrofida joylashgan. Demak, $\theta \approx 2\omega$ bo‘lganda sistema parametrik rezonansga eng moyil bo‘ladi. Aynan shu nuqtada kritik amplituda eng kichik qiymatga ega:

8. Aniq rezonans holati

Agar $\theta = 2\omega$ (28) ya’ni r=1 bo‘lsa, kritik parametrik amplituda

$h_{cr} = 4\zeta$ (29) ko‘rinishga keladi. Shunday qilib, $\mu_{cr} = 4\alpha\omega$ (30) bo‘ladi. Bu natijadan ko‘rinadiki, dempfirlash koeffitsiyenti α ortishi bilan parametrik rezonansni paydo qilish uchun zarur bo‘lgan kritik tashqi ta’sir amplitudasi ham chiziqli ravishda ortadi.

Masalan: $\zeta = 0.02 \Rightarrow h_{cr} = 0.08$

$\zeta = 0.05 \Rightarrow h_{cr} = 0.20$

$\zeta = 0.10 \Rightarrow h_{cr} = 0.40$

Demak, dempfirlash besh marta oshirilganda parametrik rezonansni qo‘zg‘atish uchun talab etiladigan kritik amplituda ham sezilarli ortadi.

9. Noturg‘unlik sohasining kengligi

Berilgan (h) uchun noturg‘unlik sohasini $|r-1|<\sqrt{\left(\frac{h}{4}\right)^2-\zeta^2}$ (31) tengsizlik bilan aniqlash mumkin. Ya’ni

$$1-\sqrt{\left(\frac{h}{4}\right)^2-\zeta^2}<\frac{\theta}{2\omega}<1+\sqrt{\left(\frac{h}{4}\right)^2-\zeta^2}$$ (32) bo‘ladi.

Chastota orqali yozsak, $|\theta-2\omega|<2\omega\sqrt{\left(\frac{h}{4}\right)^2-\zeta^2}$ (33) kelib chiqadi.

Bu formula parametrik rezonans sohasining chastota bo‘yicha kengligini ko‘rsatadi. Agar $h\le 4\zeta$ bo‘lsa, asosiy parametrik rezonans sohasi ochilmaydi.

10. Floke nazariyasi va monodromiya matritsasi

Tenglamani birinchi tartibli Floke sistema ko‘rinishiga keltiramiz:

$x_1=f,\qquad x_2=\dot{f}$

U holda

$$\dot{x}_1=x_2\quad \dot{x}_2=-2\alpha x_2-\left[\omega^2+\mu\varphi(t)\right]x_1-2\alpha\mu\int_0^t\Phi(t-\tau)\varphi(\tau)x_1(\tau)d\tau$$ (34)

Integral had e’tiborga olinmagan birinchi yaqinlashishda

Matritsali ko‘rinish: $\dot{x}=A(t)x$ bu yerda

$$A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\left[\omega^2+\mu\varphi(t)\right] & -2\alpha\end{pmatrix}$$ (35)

Fundamental matritsa: $\dot{X}(t)=A(t)X(t),\qquad X(0)=I$ tenglamani qanoatlantiradi. Bir davrdan keyingi $\mathrm{M=X(T)}$ matritsa monodromiya matritsasi deb ataladi. Uning xos qiymatlari $\det(M-\rho I)=0$ tenglamadan aniqlanadi va Floke multiplikatorlari deb ataladi.

Turg‘unlik mezoni:

Turg‘unlik mezoni: $\max_i|\rho_i|<1$ - asimptotik turg‘unlik;

$\max_i|\rho_i|=1$- turg‘unlik chegarasi;

$\max_i|\rho_i|>1$- dinamik noturg‘unlik.

Shunday qilib, spektral radius: $\rho(M)=\max_i|\rho_i|$ uchun $\rho(M)<1$ bo‘lishi turg‘unlikning asosiy sharti hisoblanadi.

Agar irsiy yadro eksponensial funksiyalar yig‘indisi bilan $\Phi(t)=\sum_{k=1}^{N}c_k e^{-b_k t}$

ko‘rinishida yaqinlashtirilsa, integro-differensial tenglamani oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin.

Qo‘shimcha o‘zgaruvchilarni $z_k(t)=\int_0^t e^{-b_k(t-\tau)}\varphi(\tau)f(\tau)d\tau$ (36)deb kiritamiz.

U holda $\dot{z}_k=\varphi(t)f(t)-b_k z_k$ (37) bo‘ladi. Shunda harakat tenglamasi

$$\ddot{f}+2\alpha\dot{f}+\left[\omega^2+\mu\varphi(t)\right]f+2\alpha\mu\sum_{k=1}^{N}c_k z_k=0$$ (38)ko‘rinishga keladi. Natijada (N+2) o‘lchovli davriy koeffitsiyentli sistema hosil bo‘ladi va unga Floke nazariyasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llash mumkin.

Bu usul qovushqoq-elastik materialning haqiqiy irsiy xususiyatlarini hisobga olishda juda qulay.

12. Qovushqoq–elastiklikning turg‘unlikka ta’siri

Garmonik deformatsiyada materialning kompleks moduli $E^*(\Omega) = E'(\Omega) + iE''(\Omega)$ ko‘rinishida yoziladi. Bu yerda (E') – to‘planuvchi energiyani xarakterlovchi dinamik modul, (E") – energiya dissipatsiyasini xarakterlovchi yo‘qotish moduli.

Yo‘qotish koeffitsiyenti $\eta = \dfrac{E''}{E'}$ bilan aniqlanadi. Kichik dempfirlash holatida qovushqoq-elastik material uchun $\zeta_v \approx \dfrac{\eta}{2}$ deb baholash mumkin. Umumiy dempfirlash

$\zeta_{\text{eff}} = \zeta_0 + \zeta_v$ ko‘rinishida qabul qilinsa, $\mu_{\text{cr}} = 4\omega^2\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{\omega}\right)^2 + \left(\dfrac{\theta}{2\omega} - 1\right)^2}$ (39)Demak,

$\zeta_{\text{eff}} \uparrow \Rightarrow h_{\text{cr}} \uparrow$ Ya’ni materialning qovushqoqligi ortishi parametrik noturg‘unlik boshlanadigan kritik amplitudani oshiradi.

Asosiy xulosa. Qovushqoq-elastik qobiqning parametrik turg‘unligi tashqi qo‘zg‘atish chastotasi ζ, sistema xususiy chastotasi ω, parametrik ta’sir intensivligi μ va dempfirlash koeffitsiyenti α ning o‘zaro munosabati bilan belgilanadi.

Asosiy parametrik rezonans $\theta \approx 2\omega$ atrofida yuzaga keladi.Bu sohada birinchi yaqinlashishda kritik amplituda

$$\mu_{\text{cr}} = 4\omega^2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{2\omega} - 1\right)^2}$$ (40) bilan baholanadi. Aniq rezonansda esa $\mu_{\text{cr}} = 4\alpha\omega$ bo‘ladi.Shu sababli qovushqoq-elastik materialda energiya dissipatsiyasining ortishi parametrik rezonans chegarasini yuqoriga siljitib, konstruksiyaning dinamik turg‘unligini oshiradi.

Bu xulosa qovushqoq-elastik tayanchlar, prujinalar, sterjenlar, qobiqlar va dinamik so‘ndirgichlarni hisoblashda muhim ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR:

1.Ilyasov M.H. Parametric vibrations and stability of viscoelastic shells // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2010. – Vol. 14. – P. 153–171. DOI: 10.1007/s11043-009-9100-2.

2. Bolotin V.V. The Dynamic Stability of Elastic Systems. – San Francisco: Holden-Day, 1964. – 451 p.

3. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. – New York: Wiley, 1979. – 720 p.

4. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity: An Introduction. 2nd ed. – New York: Dover Publications, 2013. – 384 p.