УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОЕ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Нуриддинов Бахтиёр Зафарович,
доцент Ташкентского химико-технологического института,
доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам
nuriddinovbaxtiyor1985@gmail.com
Курбанов Амирбек Сулейманович,
преподаватель Джизакского политехнического института
qurbonovamirbek@gmail.com

Аннотация. *В работе исследовано распространение свободных волн в механической системе, состоящей из вязкоупругого слоя, находящегося на вязкоупругом полупространстве. Рассмотрены два типа граничных условий на контактной границе: жёсткий и скользящий контакт. Поставленная задача сведена к системе линейных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами. Для построения дисперсионных уравнений и расчёта комплексных собственных частот применён численный метод Мюллера в сочетании с методом Гаусса. Выявлены особенности влияния диссипативной однородности и неоднородности системы на комплексный спектр частот и коэффициенты демпфирования.*

Ключевые слова: *вязкоупругость, свободные волны, дисперсионное уравнение, комплексная частота, демпфирование, жесткий контакт, скользящий контакт.*

QOVUSHQOQ-ELASTIK YARIMFAZODAGI QATLAMDA ERKIN TO‘L QINLAR

Annotatsiya. *Ishda qovushqoq-elastik yarim fazoda joylashgan qovushqoq-elastik qatlamdan tashkil topgan mexanik sistemada erkin to‘lqinlarning tarqalishi tadqiq qilingan. Kontakt chegarasida ikki turdagi chegaraviy shartlar ko‘rib chiqilgan: qattiq va sirpanuvchi kontakt. Qo‘yilgan masala kompleks koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasiga keltirilgan. Dispersiya tenglamalarini tuzish va kompleks xos chastotalarni hisoblash uchun Myullerning sonli usuli Gauss usuli bilan birgalikda qo‘llanilgan. Sistemaning dissipativ bir jinsliligi va nobir jinsliligining kompleks chastotalar spektri va dempferlash koeffitsiyentlariga ta’sirining o‘ziga xos xususiyatlari aniqlangan.*

Kalit so‘zlar: *qovushqoq-elastiklik, erkin to‘lqinlar, dispersiya tenglamasi, kompleks chastota, dempferlash, qattiq kontakt, sirpanuvchi kontakt.*

FREE WAVES IN A LAYER ON A VISCOELASTIC HALF-SPACE

Abstract. *This study investigates the propagation of free waves in a mechanical system consisting of a viscoelastic layer resting on a viscoelastic half-space. Two types of boundary conditions at the contact interface are considered: rigid and sliding contact. The formulated problem is reduced to a system of linear differential equations with complex coefficients. To construct the dispersion equations and calculate the complex eigenfrequencies, Müller's numerical method combined with the Gauss method is applied. The specific features of the influence of the system's dissipative homogeneity and heterogeneity on the complex frequency spectrum and damping coefficients are identified.*

Keywords: *viscoelasticity, free waves, dispersion equation, complex frequency, damping, rigid contact, sliding contact.*

Введение. Изучение волновых процессов в многослойных вязкоупругих средах имеет важное значение для динамики деформируемого твёрдого тела, сейсмостойкости сооружений и геомеханики [1,2,3]. Наличие диссипативных свойств в элементах конструкции приводит к затуханию волн и изменению спектра собственных частот. В зависимости от реологических характеристик составных частей системы механические структуры можно разделить на диссипативно однородные (с идентичными вязкоупругими свойствами) и диссипативно неоднородные (с различными свойствами) [4,5]. В литературе также хорошо известны два типа упругих поверхностных волн, названные волнами Рэлея и Лава в честь их первооткрывателей. Волны Рэлея возникают в результате эллиптического движения, характеризующегося сочетанием волн давления и вертикального сдвига; тогда как волны Лава возникают только в результате горизонтального сдвига [6,7]. Волны Лава

нашли множество применений, превосходящих волны Рэлея, в различных областях науки, таких как биосенсоры в биологии и медицине, хемосенсоры в химии, неразрушающий контроль материалов в технике и так далее, помимо их большого значения в сейсмологии, геологии и геофизике [8,9,10]. В настоящей работе предполагалось, что верхняя поверхность свободна от напряжений, а смещения и напряжения на границе раздела являются непрерывными, а также соблюдалось условие излучения в полупространстве. При условии, что скорость сдвиговых волн в слое должна быть ниже скорости сдвиговых волн в полупространстве, было показано существование горизонтальной сдвиговой волны, амплитуда которой быстро убывает с толщиной в полупространстве. Целью данной работы является исследование влияния условий контакта (жёсткий и скользящий contact) и диссипативной неоднородности на волновые характеристики системы «слой – полупространство».

Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим однородный изотропный линейно-вязкоупругий слой толщиной h и полупространство в прямоугольной системе координат (x, y, z). Составляющими перемещений по осям x, y, z являются u, ϑ, ω соответственно.

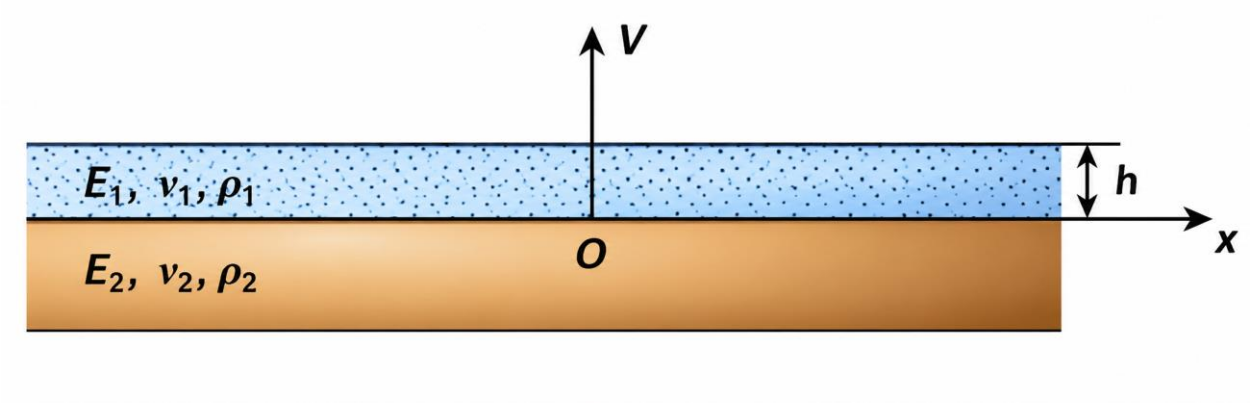


Рисунок 1. Расчетная схема системы «вязкоупругий слой – вязкоупругое полупространство».

В расчётной модели слой толщиной h контактирует с вязкоупругим полупространством; параметры материалов слоя и основания обозначены соответственно $E_1, \nu_1, \rho_1,$ и E_2, ν_2, ρ_2. Уравнения движения в напряжениях для каждой из областей имеют вид:

$$\nabla \bullet \sigma_n = \rho_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \qquad (n = 1,2) \qquad (1)$$

где ρ_n - плотность материала слоя $(n = 1)$ и полупространства $(n = 2)$.

Граничные условия:

На свободной поверхности слоя $(y = h)$:

$$\sigma_{yy1} = 0, \qquad \sigma_{yx1} = 0 \qquad (2)$$

На границе раздела $(y = 0)$:

При жёстком контакте:

$$\sigma_{yy1} = \sigma_{yy2}, \qquad \sigma_{yx1} = \sigma_{yx2}, \quad u_1 = u_2, \qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 \qquad (3a)$$

При скользящем контакте (без сдвиговых усилий):

$$\sigma_{yx1} = 0, \qquad \sigma_{yx2} = 0, \qquad \vartheta_1 = \vartheta_2 \qquad (3b)$$

Метод решения

Решение системы уравнений ищется в виде гармонических волн:

$$u_n = U_n(y) e^{i(kx - \omega t)}, \qquad \vartheta_n = V_n(y) e^{i(kx - \omega t)}, \qquad (4)$$

где $U_n(y)$ и $V_n(y)$ — амплитудные комплексные вектор-функции; k — волновое число; $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — комплексная частота ($C = C_R + iC_I$ — комплексная фазовая скорость). Подстановка

решений (4) в уравнения движения (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $U_n(y)$ и $V_n(y)$:

$$L_n(U_n, V_n) = 0 \qquad (5)$$

Частное решение системы (5) ищется в виде $e^{r_n y}$. Составляя определяющий характеристический определитель, находим корни r_n, отвечающие скоростям волн сжатия и сдвига. Вязкоупругие свойства материала учитываются через комплексный модуль Юнга $E(\omega)$:

$$E(\omega) = E(\omega)\left[1 + i\eta(\omega)\right] \qquad (6)$$

где функции $E(\omega)$ и $\eta(\omega)$ представляются аналитически:

$$E(\omega) = E_{\min} + (E_{\max} - E_{\min}) f(\omega), \qquad \eta(\omega) = \eta_0 \cdot g(\omega) \qquad (7)$$

Подстановка выражений для перемещений в граничные условия (3a) или (3b) приводит к однородной системе шести алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных C_{ij}. Условие существования нетривиального решения (равенство нулю определителя системы) даёт **дисперсионное уравнение**:

$$\Delta(\zeta, \omega) = 0 \qquad (8)$$

Где $\zeta = kh$ — безразмерное волновое число.

«Поиск корней частотного уравнения (8) осуществляется методом Мюллера, при этом на каждой итерации вычисление определителя производится методом Гаусса с выделением главного элемента, что исключает необходимость прямого раскрытия определителя **высокого порядка**».

Численные результаты и их обсуждение

При расчётах приняты следующие параметры материалов:

$E_{\min} = 6.9 \times 10^6 H/m^2$, $E_{\min} = 6.9 \times 10^5 H/m^2$, $\theta = 0.75$, $\alpha = 10^{-4}$, $n = 1$

Безразмерное волновое число ζ варьировалось в пределах $0 \le \zeta \le 4$.

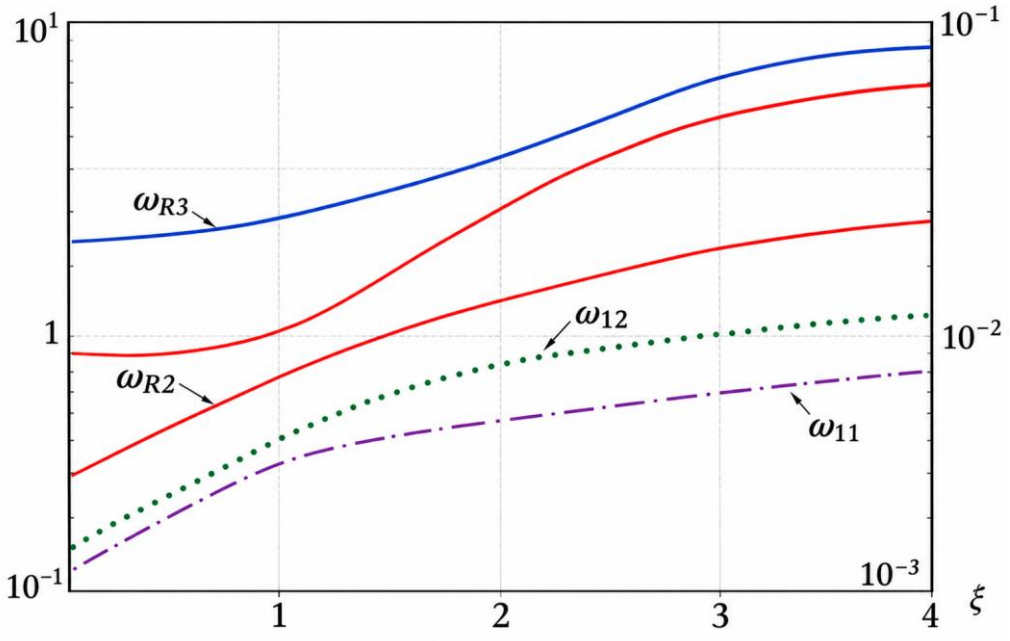


Рисунок 2. Зависимость комплексных собственных частот от безразмерного волнового числа ξ для диссипативно однородной системы

На рисунке 2 представлены действительные и мнимые составляющие комплексных собственных частот. При увеличении ξ действительные части частот изменяются монотонно, тогда как мнимые составляющие характеризуют интенсивность диссипативного затухания.

Диссипативно неоднородная система. ля системы с различными реологическими характеристиками слоя и полупространства:

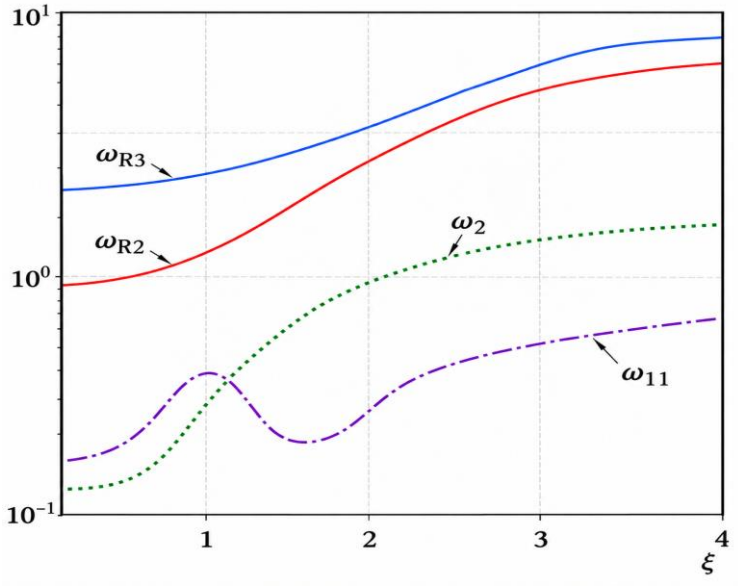


Рисунок 3. Комплексный спектр собственных частот диссипативно неоднородной системы

Сопоставление с рисунком 3 показывает, что диссипативная неоднородность оказывает существенно большее влияние на мнимые части частот и коэффициенты демпфирования, чем на их действительные части.

• Зависимость действительной части частоты ω_R от ζ практически совпадает с однородным случаем (отклонение не превышает 5%).

• Зависимости коэффициентов демпфирования ω_I от ζ становятся немонотонными.

Особый интерес представляет минимальный коэффициент демпфирования системы:

$$\delta = \min\left(-\omega_{Ik}\right)$$

Для неоднородной системы наблюдается эффект «смены ролей» мнимых частей первой и второй частот при некотором характерном значении ζ. В этой точке действительные части ω_{R1} и ω_{R2} максимально близки, а коэффициент демпфирования δ имеет ярко выраженный максимум.

Скользящий контакт. Для скользящего контакта дисперсионное уравнение сохраняет аналогичную структуру, однако условие отсутствия сдвигового усилия на границе раздела изменяет комплексный спектр. На рисунка 4 и 5 приведены соответствующие зависимости для диссипативно однородной и неоднородной систем.

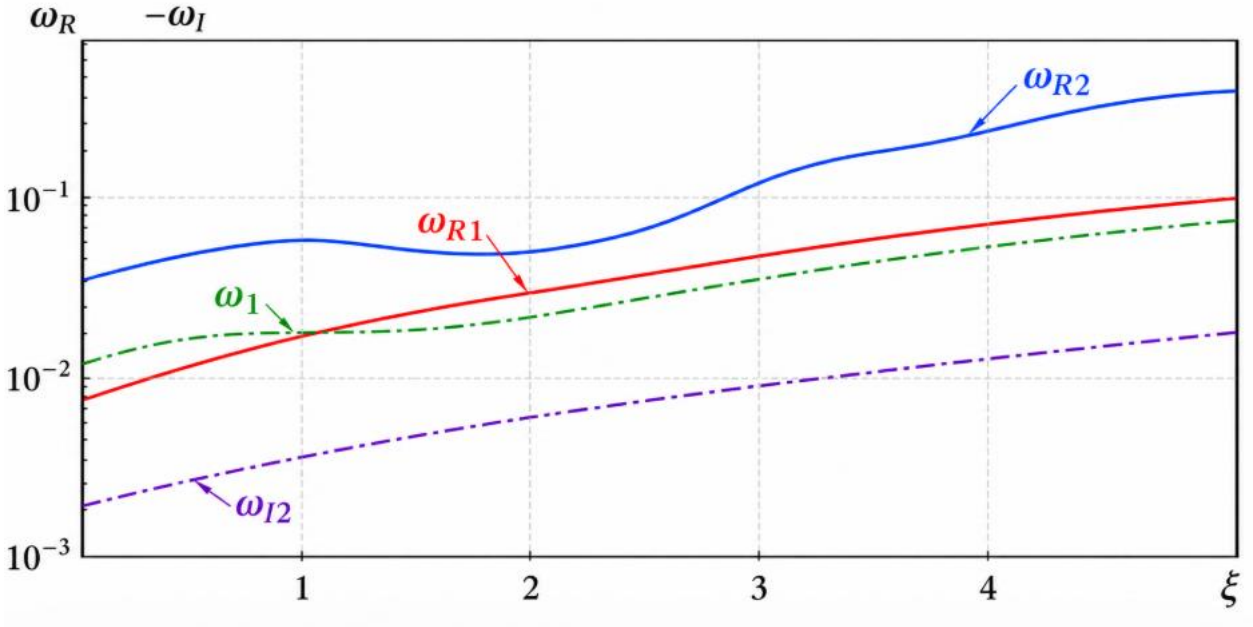


Рисунок 4. Комплексные собственные частоты от безразмерного волнового числа ξ при скользящем контакте: диссипативно однородная система

Для однородной системы кривые действительных частей частот изменяются плавно, а мнимые части определяют уровень волнового затухания при скользящем контакте.

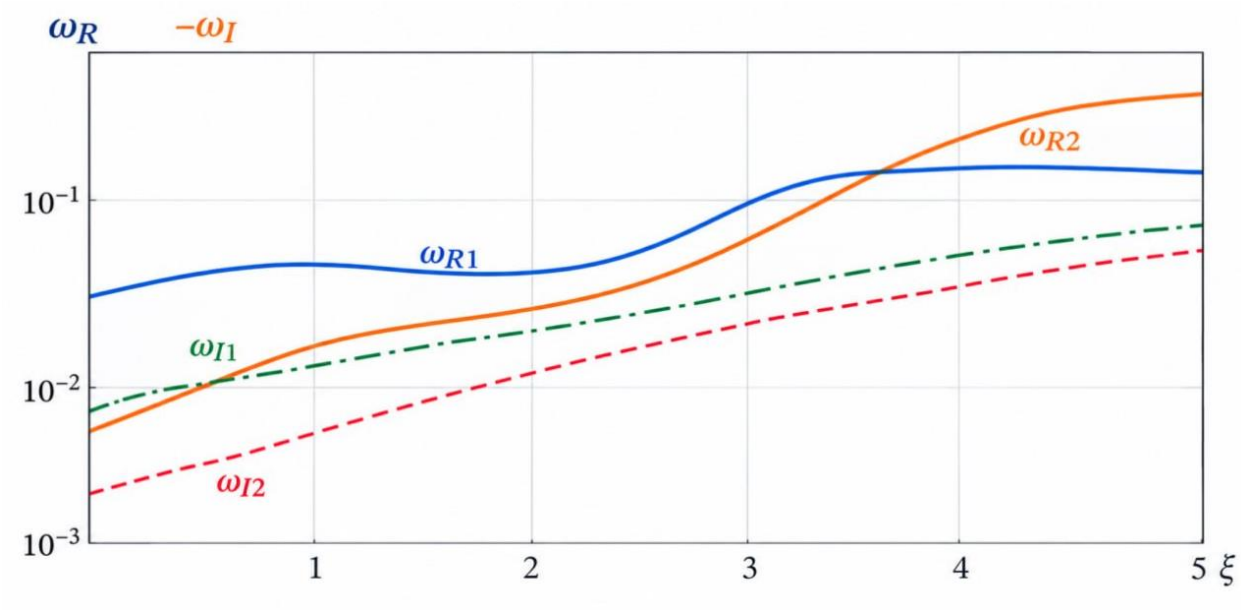


Рисунок 5. Комплексные собственные частоты от безразмерного волнового числа ξ при скользящем контакте: диссипативно неоднородная система

В неоднородной системе сохраняется эффект сближения действительных частей соседних мод, сопровождающийся выраженным максимумом коэффициента демпфирования. Это подтверждает возможность управления диссипативными характеристиками системы посредством изменения её структуры и условий контакта.

Заключение.

1. Разработан эффективный численный алгоритм на основе методов Мюллера и Гаусса для расчёта комплексных спектров частот вязкоупругих многослойных систем.

2. Установлено, что диссипативная неоднородность приводит к немонотонной зависимости коэффициентов демпфирования от волнового числа.

3. Появление локального максимума коэффициента демпфирования δ позволяет эффективно управлять вибропоглощающими характеристиками конструкций путем подбора геометрических параметров элементов без изменения их химического или механического состава.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Tiainen, V.M. Amorphous carbon as a bio-mechanical coating-mechanical properties and biological applications. Diam. Relat. Mater. 2001, 10, 153–160.

2. Achenbach, J. Wave Propagation in Elastic Solids; Elsevier: Amsterdam, The Netherland, 2012.

3. Qian, Z.; Jin, F.; Kishimoto, K.; Wang, Z. Effect of initial stress on the propagation behavior of SH-waves in multilayered piezoelectric composite structures. Sens. Actuators A Phys. 2004, 112, 368–375.

4. Vinh, P.C.; Anh, V.T.N.; Thanh, V.P. Rayleigh waves in an isotropic elastic half-space coated by a thin isotropic elastic layer with smooth contact. Wave Motion 2014, 51, 496–504.

5. Mubaraki, A.; Prikazchikov, D.; Kudaibergenov, A. Explicit model for surface waves on an elastic half-space coated by a thin vertically inhomogeneous layer. In Dynamical Systems Theory and Applications; Springer: Cham, Switzerland, 2019; pp. 267–275.

6. Mubariki, A.; Prikazchikov, D. On Rayleigh wave field induced by surface stresses under the effect of gravity. Math. Mech. Solids 2020, 27, 1771–1782. [

7. Abd-Alla, A.M.; Abo-Dahab, S.M.; Khan, A. Rotational effects on magneto-thermoelastic Stoneley, Love, and Rayleigh waves in fibre-reinforced anisotropic general viscoelastic media of higher order. Comput. Mater. Contin. 2017, 53, 49–72.

8. Selim, M.M. Effect of thermal stress and magnetic field on propagation of transverse wave in an anisotropic incompressible dissipative initially stressed plate. Appl. Math. Inf. Sci. 2017, 11, 195–200.

9. Wang, Y.Z.; Li, F.M.; Kishimoto, K. Thermal effects on vibration properties of double-layered nanoplates at small scales. Compos. Part B Eng. 2011, 42, 1311–1317.

10.Ahmad, F.; Zaman, F.D. Exact and asymptotic solutions of the elastic wave propagation problem in a rod. Int. J. Pure Appl. Math. 2006, 27, 123–127.

11.Lord, H.W.; Shulman, Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. J. Mech. Phy. Solids 1967, 15, 299–309.