UO‘K 517.957

YUKLANGAN HADLI NOCHIZIQLI DEFOKUSLANGAN SHREDINGER TENGLAMASIGA QO‘YILGAN KOSHI MASALASINI YECHISH

Nurmamatova Munira Rustam qizi,
Sharof Rashidov nomidagi
Samarqand davlat universiteti tadqiqotchisi
nurmamatovamunira62@gmail.com
To‘rayev Rustam Dilshod o‘g‘li,
Sharof Rashidov nomidagi
Samarqand davlat universiteti tadqiqotchisi

Annotatsiya. *Ushbu maqolada teskari spektral masalalar usuli yordamida cheksiz zonali davriy funksiyalar sinfida yuklangan hadli nochiziqli Shredinger tenglamasining integrallanuvchanligi tadqiq etiladi. Bir zonali potensial holati uchun Koshi masalasining aniq yechimi topilgan. Ishda Dirak operatori, spektral ma’lumotlar, Dubrovin tenglamalar sistemasi va iz formulalaridan foydalangan holda tenglamaning spektral tahlili amalga oshiriladi.*

Kalit so‘zlar: *nochiziqli Shredinger tenglamasi, Dirak operatori, teskari spektral masala, spektral berilganlar, Dubrovin tenglamalar sistemasi, izlar formulasi.*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДЕФОКУСИРУЮЩЕГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С НАГРУЖЕННЫМ ЧЛЕНОМ

Аннотация. *В данной статье с помощью метода обратных спектральных задач исследуется интегрируемость нелинейного уравнения Шрёдингера с нагруженным членом в классе бесконечнозонных периодических функций. Для случая однозонного потенциала найдено точное решение задачи Коши. В работе проводится спектральный анализ уравнения с использованием оператора Дирака, спектральных данных, системы уравнений Дубровина и формул следов.*

Ключевые слова: *нелинейное уравнение Шрёдингера, оператор Дирака, обратная спектральная задача, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формула следов.*

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE DEFOCUSING NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH A LOADED TERM

Abstract. *In this paper, the integrability of the nonlinear Schrödinger equation with a loaded term is investigated in the class of finite-gap periodic functions using the inverse spectral problem method. For the one-gap potential case, an exact solution to the Cauchy problem is obtained. The spectral analysis of the equation is carried out using the Dirac operator, spectral data, the Dubrovin system of equations, and trace formulas.*

Keywords: *nonlinear Schrödinger equation, Dirac operator, inverse spectral problem, spectral data system of Dubrovin equations, trace formula.*

Kirish. Nochiziqli optika, kvant mexanikasi, gidrodinamika masalalarini tadqiqotlarida nochiqli Shredinger tenglamasi uchun qo‘yilgan Koshi masalasi yechimini topish muhim ahamiyatga ega. Bundan yuklangan hadlarga ega nochiziqli Shredinger tenglamasini integrallash, Dubrovin differensial tenglamalar sistemasini keltirib chiqarish dolzarb masala hisoblanadi.

Mazkur ishda o‘rganilgan yuklangan hadlarga ega nochiziqli defokuslangan Shredinger tenglamasiga qo‘yilgan Koshi masalasini davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida yechimga egaligini o‘rganish bo‘yicha olingan natijalar zamonaviy matematik fizika, kvant mexanikasida, nochiziqli optikada va davriy to‘lqinlarning nochiziqli muhitdagi tarqalish jarayonlarida qo‘llaniladi.

Ushbu ishda quyidagi

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q\left(p^2 + q^2\right) + p(x_0,t)q, \\ q_t = p_{xx} - 2p\left(p^2 + q^2\right) - p(x_0,t)p. \end{cases} \tag{1}$$

ko‘rinishdagi yuklangan hadli nochiziqli defokuslangan Shredinger tenglamasini

$$p(x,t)\big|_{t=0} = p_0(x), q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x),\ x_0, x \in R, t > 0 \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarini qanoatlantiruvchi $p(x,t), q(x,t)$ yechimini davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida topish masalasini qaraymiz. Bu yerda $p(x,t)$ va $p(x,t)$ lar ushbu

$$\begin{aligned} &p(x,t) \in C_x^2(t>0) \bigcap C_t^1(t>0) \bigcap C(t \ge 0), \\ &q(x,t) \in C_x^2(t>0) \bigcap C_t^1(t>0) \bigcap C(t \ge 0) \end{aligned} \tag{3}$$

silliqlik shartlarini qanoatlantiruvchi *x* o‘zgaruvchi bo‘yicha π - davrli funksiyalar.
(1) - (3) Koshi masalasining yechimini, quyidagi

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y,\ \tau \in R, t > 0 \tag{4}$$

Dirak operatoriga qo‘yilgan teskari spektral masala usulidan foydalanib topamiz.
Bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

(4) ko‘rinishdagi Dirak tenglamalar sistemasining

$$c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T \text{ va } s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T \tag{5}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini mos ravishda

$c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ va $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$

orqali belgilaymiz. Bundan tashqari (4) tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan davriy va yarimdavriy $y(0,\lambda,\tau,t) = \pm y(\pi,\lambda,\tau,t)$ chegaraviy masalaning xos qiymatlarini $\lambda_n(\tau,t), n \in Z$ orqali, (4) tenglamaga qo‘yilgan $y_1(0,\lambda,\tau,t) = 0, y_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ Dirixle chegaraviy masalaning xos qiymatlarini $\xi_n(\tau,t), n \in Z$ orqali belgilaymiz.

1-teorema. Aytaylik $p(x,t), q(x,t), x \in R, t > 0$ funksiyalar (1) - (3) Koshi masalasining yechimi bo‘lsin. U holda (4) Dirak operatorining

$\{\lambda_n(\tau,t), \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in Z\}$ spektral berilganlari quyidagi Dubrovin differensial tenglamalar sistemasining analogini qanoatlantiradi:

$$1)\ \frac{\partial \lambda_n(\tau,t)}{\partial t} = 0,\ \lambda_n(\tau,0) = \lambda_n, n \in Z;$$

$$2)\ \frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) \Big\{ q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) + \Big[p(\tau,t) + \xi_n(\tau,t) \Big]^2 + \\ + \xi_n^2(\tau,t) + \frac{1}{2} p(x_0,t) \Big\}, n \in Z. \tag{5}$$

Bundan tashqari quyidagi

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in Z \tag{6}$$

boshlang‘ich shartlar ham bajariladi. Bu yerda $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z$ lar $L(\tau,0)$ Dirak operatorining spektral parametrlari. (5) tenglamadagi $h_n(\xi(\tau,t)), n \in Z$ ketma-ketlik

$$h_n(\xi(\tau,t)) = f_n(\xi(\tau,t)) \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau,t))},$$

$$f_n(\xi(\tau,t)) = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \ne n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}}$$

formula bilan aniqlanadi.

Isbot. $L(\tau,t)y = B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \tau \in \mathbb{R}$, tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan Dirixle chegaraviy $y_1(0,\tau,t) = 0, y_1(\pi,\tau,t) = 0$ masalasining xos qiymatlari $\xi_n(\tau,t)$ va ularga mos ortonormal xos vektor funksiyalar $y_n(x,\tau,t) = \left(y_{n,1}(x,\tau,t),\ y_{n,2}(x,\tau,t)\right)^T, n \in \mathbb{Z}$ bo‘lsin, u holda $L(\tau,t)y_n(x,\tau,t) = \xi_n(\tau,t)y_n(x,\tau,t)$

tenglik bajariladi. Bu tenglikning ikki tomonini $y_n(x,\tau,t)$ ortonormal vektor funksiyaga skalyar ko‘paytirib, quyidagi

$$\xi_n(\tau,t = (L(\tau,t)y_n, y_n) \tag{7}$$

tenglikni hosil qilamiz. (3.1.6) tenglikning ikki tomonini t bo‘yicha differensiallab,$L(\tau,t)$operatorning simmetrikligidan foydalansak u holda ushbu

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = \left(\dot{\Omega}(x+\tau,t)y_n, y_n\right), n \in \mathbb{Z}$$

munosabat hosil bo‘ladi.Skalyar ko‘paytmaning ta’rifidan foydalanib quyidagi

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = \int_0^\pi \left[\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right)p_t + 2y_{n,1}y_{n,2}q_t\right]dx \tag{8}$$

tenglikni hosil qilamiz. (1)dagi p_t,q_t larni (8) ga qo‘yamiz:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = \int_0^\pi \left[\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right)(-q_{\text{xx}} + 2q(p^2+q^2) + 2y_{n,1}y_{n,2}(p_{\text{xx}} - 2p(p^2+q^2)\right]dx +$$
$$[p(x_0,t) + q(x_0,t)]\times\int_0^\pi \left[q\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right) + 2py_{n,1}y_{n,2}\right]dx.$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz.

$$I_1(\tau,t) = \int_0^\pi \{[-q_{xx} + 2q(p^2+q^2) + q]\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right) +$$
$$+2[p_{xx} - 2p(p^2+q^2) - p]y_{n,1}y_{n,2}\}dx$$
$$I_2(\tau,t) = \int_0^\pi \left[p\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right) + 2qy_{n,1}y_{n,2}\right]dx$$

Natijada ushbu

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = I_1(\tau,t) + [p(x_0,t) + q(x_0,t)]I_2(\tau,t) \tag{9}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

$I_1(\tau,t)$, $I_2(\tau,t)$ integrallarni hisoblaymiz.

Buning uchun integrallar ostidagi ifodalarning boshlang‘ich funksiyalarini $a_i(x,\xi_n,t)y_{n,1}^2 + b_i(x,\xi_n,t)y_{n,1}y_{n,2} + c_i(x,\xi_n,t)y_{n,2}^2, a(t), \quad i = 1,2,3..$ kvadratik formalarning hosilalari ko‘rinishida izlaymiz va quydagi tenglikdan foydalanamiz:

$$\left\{\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right)\left[-q_{xx} + 2q(p^2+q^2) + 2y_{n,1}y_{n,2}[p_{xx} - 2p(p^2+q^2)]\right]\right\}' = \left(a_1(x,\xi_n,t)y_{n,1}^2 +\right.$$
$$\left. + b_1(x,\xi_n,t)y_{n,1}y_{n,2} + c_1(x,\xi_n,t)y_{n,2}^2\right)',$$
$$q\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right) + 2py_{n,1}y_{n,2} = (a_2(x,\xi_n,t)y_{n,1}^2 + b_2(x,\xi_n,t)y_{n,1}y_{n,2} + c_2(x,\xi_n,t)y_{n,2}^2)'$$

Ma’lumki,

$$\begin{cases} y'_{n,1} = qy_{n,1} - py_{n,2} - \xi_n y_{n,2} \\ y'_{n,2} = \xi_n y_{n,1} - py_{n,1} - qy_{n,2} \end{cases} \tag{10}$$

o‘rinli. Bundan esa

$$\left(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2\right)\left[-q_{xx} + 2q(p^2+q^2) + 2y_{n,1}y_{n,2}[p_{xx} - 2p(p^2+q^2)]\right] = \{[-q_x + q^2 + (p -$$
$$\xi_n)^2 + \xi_n^2]y_{n,1}^2 + (p_x - 4q\xi_n)y_{n,1}y_{n,2} + [q_x + q^2 + (p+\xi_n)^2 + \xi_n^2]y_{n,2}^2\}',$$
$$q(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) + 2py_{n,1}y_{n,2} = \frac{1}{2}\left(y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2\right)'$$

ekanligini ko‘rsatish qiyinchilik tug‘dirmaydi.

U holda, $I_1(\tau,t)$, $I_2(\tau,t)$ integrallar natijasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} I_1(\tau,t) = q_x + q^2 + p^2 + 2p\xi_n + 2\xi_n^2 \\ I_2(\tau,t) = \frac{1}{2}(y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t)) \end{cases} \tag{11}$$

(9) va (11) tengliklardan foydalanib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = \left(q^2(\tau,t) + q_\tau(\tau,t) + \left(p(\tau,t) + \xi_n(\tau,t)\right)^2 + \xi_n^2(\tau,t)\right)\times$$

$$\times\left[y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t)\right] \tag{12}$$
$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t) = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t)) \tag{13}$$

Bu tenglikni (12)ga qo‘yib , (4)ni hosil qilamiz. Agar Dirixle chegaraviy shartlarini davriy $y(0,\tau,t)=y(\pi,\tau,t)$ yoki yarimdavriy $y(0,\tau,t)=-y(\pi,\tau,t)$ chegaraviy masalani qarasak, u holda uning $\lambda_n(\tau,t)$ xos qiymatlari uchun

$\frac{\partial\lambda_n(\tau,t)}{\partial t}=0, n\in\mathbb{Z}$, yoki $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau,0), n\in\mathbb{Z}$ tengliklar hosil bo‘ladi. Endi $L(\tau,t)v_n=\lambda_n(\tau,t)v_n, n\in\mathbb{Z}$ tenglamaga t=0 ni qo‘yamiz, u holda $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n(\tau,0), n\in\mathbb{Z}$ ga ega bo‘lamiz. Bundan $L(\tau,0)v_n=\lambda_n(\tau)v_n, n\in\mathbb{Z}$

davriy yoki yarimdavriy masalaning xos qiymatlari $\tau\in\mathbb{R}$ parametrga bog‘liq emasligi kelib chiqadi, ya’ni $\lambda_n(\tau,0)=\lambda_n(\tau)=\lambda_n, n\in\mathbb{Z}, \tau\in\mathbb{R}$ kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

1-natija. Ushbu

$$p(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right), \tag{14}$$

$$q(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)), \tag{15}$$

$$q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right). \tag{16}$$

izlar formulalaridan foydalanib Dubrovin differensial tenglamalar sistemasini yopiq ko‘rinishda yozish mumkin.

2-natija. 1- teorema (1) - (3) masalaning yechimini topish usulini beradi. Buning uchun dastlab $L(\tau,0)$ Dirak operatorining $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau)=\pm1, n\in Z$ spektral berilganlarini aniqlaymiz, so‘nra $L(\tau,t)$ operatorning spektral berilganlarini $\lambda_n, \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t)=\pm1, n\in Z$ orqali belgilaymiz. Keyin (5) tenglamalar sistemasi va (6) boshlang‘ich shartlar ketma-ketligida $\tau=x_0$ deb olamiz. Hosil bo‘lgan Koshi masalasini yechib, $\xi_n(x_0,t), \sigma_n(x_0,t), n\in Z$ ni topamiz. So‘ngra (8), (9) izlar formulalaridan $p(x_0,t)$ funksiyani aniqlaymiz. Shundan keyin, buni (5) tenglamalar sistemasiga qo‘yamiz va τ ning ixtiyoriy qiymatida (5)-(6) Koshi masalasini yechib $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t), n\in Z$ larni aniqlaymiz. Topilgan $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t), n\in Z$ spektral parametrlardan hamda (8) va (9) izlar formulalaridan foydalanib (1) - (3) Koshi masalasining $(p(\tau,t), q(\tau,t))$ yechimlarni topamiz.

3 - natija. Bir zonali potensial holida (1) tenglamani ushbu

$$p(x,t)\big|_{t=0}=\frac{\lambda_0-\lambda_{-1}}{2}\cos\{-(\lambda_{-1}+\lambda_0)x+2\sigma_0(0)\varphi(0)\}$$

$$q(x,t)\big|_{t=0}=-\frac{\lambda_0-\lambda_{-1}}{2}\sin\{-(\lambda_{-1}+\lambda_0)x+2\sigma_0(0)\varphi(0)\}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi 2-natijadagi usul bo‘yicha yechamiz, bu holat uchun Dubrovin differensial tenglamalar sistemasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2\sigma_0(\tau,t)\sqrt{(\xi_0(\tau,t)-\lambda_{-1})(\lambda_0-\xi_0(\tau,t))}\times$$

$$\times\left\{\frac{\lambda_{-1}^2+\lambda_0^2}{2}+\frac{(\lambda_{-1}+\lambda_0)^2}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{-1}+\lambda}{2}-\xi_0(x_0,t)\right]\right\}$$

$$\xi_0(\tau,t)\big|_{t=0}=\frac{\lambda_0+\lambda_{-1}}{2}-\frac{\lambda_0-\lambda_{-1}}{2}\cos\{-(\lambda_{-1}+\lambda_0)\tau+2\sigma_0(0)\varphi(0)\}\quad \sigma_0(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_0(\tau)$$

$\lambda_{-1}=-\lambda_0$ bo ‘lganda yechim quyidagicha bo‘ladi:

$$p(\tau,t)=\lambda_0\cos\left\{2\lambda_0^2 t+\lambda_0\left[\frac{2M}{N(M^2-1)}arctg\left[M(tg(Nt+L))\right]-\frac{M^2+1}{M^2-1}t\right]+2C(\tau)\right\}$$

$$q(\tau,t)=-\lambda_0\sin\left\{2\lambda_0^2 t+\lambda_0\left[\frac{2M}{N(M^2-1)}arctg\left[M(tg(Nt+L))\right]-\frac{M^2+1}{M^2-1}t\right]+2C(\tau)\right\}$$

Bu yerda $M=\sqrt{\frac{2\lambda_0^2+\lambda_0}{2\lambda_0^2-\lambda_0}}$, $N=\lambda_0\sqrt{\lambda_0^2-\frac{1}{4}}$, $\lambda_0>\frac{1}{2}$, $L=arctg\left\{\frac{1}{M}tg\left[\sigma_0(0)\varphi_0(0)\right]\right\}$

$C(\tau)$ berilgan boshlang‘ich shartlardan topiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.

2. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера. // Докл. АН УССР. Сер.А.,1976, №11, 965-968.

3. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. // Функц. анализ и его прил. – Москва, 1975.т.9.вып.3. с.41-51.

4. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. - М.: Наука, 1988. - 432 с.

5. Хасанов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Шрёдингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199,№1,с.60-68.

6. Домрин А.В. О вещественно-аналогических решениях нелинейного уравнения Шрёдингера. // Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.

7. Муминов У.Б., Хасанов А.Б. Задача Коши для дефокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера с нагруженным членом. // Математические труды. 2022, т. 25, №1, с. 102-133.