UO‘K 519.21

TASODIFIY JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISHNING NAZARIY ASOSLARI

Botirova Mavluda To‘xtasin qizi,
Andijon davlat pedagogika instituti
Matematika va informatika kafedrasi o‘qituvchisi
Andijon, O‘zbekiston
botirovamavluda9@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada tasodifiy jarayonlarni matematik modellashtirishning nazariy va amaliy jihatlari binomial taqsimot asosida tadqiq etilgan. Binomial model parametrlarining matematik kutilma, dispersiya va standart og‘ishga ta’siri parametrik hamda analitik usullar yordamida tahlil qilingan. Dispersiyaning* $p = 0{,}5$ *da maksimal qiymatga erishishi asoslangan va tajribalar sonining model xususiyatlariga ta’siri baholangan. Shuningdek, binomial model asosida texnologik jarayonda mahsulot sifatini statistik nazorat qilish hamda* 3σ *tamoyili bo‘yicha nazorat chegaralarini aniqlash imkoniyatlari ko‘rsatib berilgan.*

Kalit so‘zlar: *tasodifiy jarayon, matematik modellashtirish, binomial taqsimot, matematik kutilma, dispersiya, parametrik tahlil, statistik nazorat,* 3σ *nazorat chegaralari.*

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. *В статье исследованы теоретические и практические аспекты математического моделирования случайных процессов на основе биномиального распределения. Параметрическими и аналитическими методами проанализировано влияние параметров биномиальной модели на математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Обосновано, что дисперсия достигает максимального значения при* $p = 0{,}5$ *а также оценено влияние числа испытаний на характеристики модели. Рассмотрены возможности статистического контроля качества продукции в технологическом процессе на основе биномиальной модели и определения контрольных границ по принципу* 3σ.

Ключевые слова: *случайный процесс, математическое моделирование, биномиальное распределение, математическое ожидание, дисперсия, параметрический анализ, статистический контроль, контрольные границы* 3σ.

THEORETICAL FOUNDATIONS OF MATHEMATICAL MODELING OF RANDOM PROCESSES

Abstract. *This article investigates the theoretical and practical aspects of mathematical modeling of random processes based on the binomial distribution. The effects of the binomial model parameters on the mathematical expectation, variance, and standard deviation are analyzed using parametric and analytical methods. It is shown that the variance reaches its maximum value at* $p = 0.5$ *and the influence of the number of trials on the model characteristics is evaluated. In addition, the possibilities of statistical quality control in technological processes using the binomial model and the determination of control limits based on the* 3σ *principle are considered.*

Keywords: *random process, mathematical modeling, binomial distribution, mathematical expectation, variance, parametric analysis, statistical quality control,* 3σ *control limits.*

Kirish. Tasodifiy jarayonlarni matematik modellashtirish ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Tasodifiy hodisalar va ularning ehtimollik qonuniyatlarini matematik tavsiflash masalalari zamonaviy ehtimollar nazariyasiga oid fundamental tadqiqotlarda keng yoritilgan [1–4]. Xususan, binomial taqsimot o‘zaro mustaqil va bir xil sharoitda takrorlanadigan ikki natijali tajribalarda muvaffaqiyatlar sonini modellashtirishning asosiy diskret ehtimollik modellaridan biri sifatida qaraladi [1, 5, 6].

Binomial modelning matematik kutilmasi va dispersiyasi uning n va p parametrlariga bevosita bog‘liq. Mazkur parametrlarning o‘zgarishi nafaqat kutilayotgan natijaga, balki tasodifiy natijalarning

absolyut va nisbiy tarqalish darajasiga ham ta’sir qiladi. Shu jihatdan binomial model parametrlarini tizimli tahlil qilish hamda olingan nazariy natijalarni ikki natijali texnologik jarayonlarning statistik nazorati bilan bog‘lash muhim amaliy ahamiyatga ega.

Maqolaning asosiy maqsadi binomial taqsimot parametrlarining matematik kutilma, dispersiya, standart og‘ish va variatsiya koeffitsiyentiga ta’sirini parametrik hamda analitik usullar yordamida tadqiq etish, shuningdek, olingan natijalar asosida binomial modeldan texnologik jarayonlarda mahsulot sifatini statistik nazorat qilishda foydalanish imkoniyatlarini asoslashdan iborat.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Tasodifiy jarayonlar va ehtimollik modellarining nazariy asoslari S.M. Rossning tadqiqotlarida keng yoritilgan. Muallif tasodifiy hodisalar, tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonunlari hamda binomial modelning asosiy xususiyatlarini tizimli ravishda bayon etgan [1, 2]. G.R. Grimmett va D. R. Stirzaker ishlarida esa ehtimollik va tasodifiy jarayonlarning matematik asoslari, tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari va ehtimollik modellarining nazariy xususiyatlari chuqur tahlil qilingan [3].

R. B. Schinazi tadqiqotida ehtimollik modellarining statistik qo‘llanilishiga alohida e’tibor qaratilgan [4]. B. Illowsky va S. Dean ishida matematik kutilma, dispersiya, standart og‘ish hamda diskret ehtimollik taqsimotlarining statistik tahlildagi o‘rni yoritilgan [5]. Binomial taqsimotning matematik xususiyatlari va undan statistik masalalarda foydalanish imkoniyatlari NIST/SEMATECH elektron qo‘llanmasida ham keltirilgan [6].

Mavjud manbalar binomial taqsimotning nazariy va statistik asoslarini keng yoritadi. Mazkur maqolada esa ushbu nazariy asoslardan kelib chiqib, binomial model parametrlarining matematik kutilma, dispersiya, standart og‘ish va variatsiya koeffitsiyentiga ta’siri o‘zaro bog‘liq holda tahlil qilinadi hamda modelning ikki natijali texnologik jarayonlarda statistik nazorat vositasi sifatida qo‘llanish imkoniyatlariga e’tibor qaratiladi.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqotda nazariy, parametrik va analitik tahlil usullaridan foydalanildi. Nazariy qismda tasodifiy hodisa, tasodifiy miqdor, matematik kutilma, dispersiya va standart og‘ish tushunchalari hamda binomial taqsimotning asosiy matematik xususiyatlari o‘rganildi [1–6].

Parametrik tahlilda binomial modelning n va p parametrlarining matematik kutilma $M(X) = np$, dispersiya $D(X) = np(1-p)$ va standart og‘ish $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ ko‘rsatkichlariga ta’siri sonli hisoblashlar asosida baholandi. Dispersiyaning p parametriga bog‘liqligi hosila olish usuli yordamida analitik tahlil qilinib, $p = 0{,}5$ da maksimal qiymatga erishishi asoslandi. Shuningdek, tajribalar sonining natijalarning nisbiy tarqalishiga ta’siri variatsiya koeffitsiyenti orqali baholandi.

Binomial modelning amaliy qo‘llanilishini baholash uchun ikki natijali texnologik jarayonda mahsulot sifatini statistik nazorat qilish masalasi ko‘rib chiqildi. Model asosida matematik kutilma va standart og‘ish hisoblanib, 3σ tamoyili bo‘yicha **taxminiy statistik nazorat chegaralari** aniqlandi hamda kuzatilgan natijalarni ushbu chegaralar bilan taqqoslash asosida jarayon holatini baholash yondashuvi qo‘llanildi.

Tahlil va natijalar. Binomial taqsimot mustaqil va bir xil sharoitda takrorlanadigan tajribalarda ikki xil natijadan birining yuzaga kelish sonini modellashtirish uchun qo‘llaniladi. Bunda tajribalar soni n, har bir tajribada muvaffaqiyatning yuzaga kelish ehtimoli p, muvaffaqiyatsizlik ehtimoli esa $q = 1 - p$ orqali belgilanadi. Agar tasodifiy miqdor ta mustaqil tajribada muvaffaqiyatlar sonini ifodalasa, u binomial taqsimotga ega bo‘lib, $X \sim B(n,p)$ ko‘rinishida belgilanadi. Binomial taqsimotning ehtimollik funksiyasi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \;\; k = 0{,}1, \dots, n.$$

Bu yerda $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ kombinatsiyalar soni bo‘lib, n ta tajriba ichidan k ta muvaffaqiyatli natijaning joylashish usullarini ifodalaydi [1, 6, 7].

Binomial taqsimotning muhim sonli xarakteristikalari uning matematik kutilmasi, dispersiyasi va standart og‘ishidan iborat. Agar $X \sim B(n,p)$ bo‘lsa, uning matematik kutilmasi $M(X) = np$ formula orqali aniqlanadi. Mazkur ko‘rsatkich n ta mustaqil tajribada kutilayotgan muvaffaqiyatlar sonining o‘rtacha qiymatini ifodalaydi. Binomial taqsimotning dispersiyasi: $D(X) = np(1-p) = npq$ ko‘rinishida aniqlanadi.

Dispersiyaning kvadrat ildizi standart og‘ish bo‘lib, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ formula orqali hisoblanadi. Ushbu ko‘rsatkichlar binomial jarayonda natijalarning markaziy tendensiyasi va tarqalish darajasini baholash imkonini beradi [5, 6].

Binomial taqsimotning asosiy parametrlari n va p bo‘lib, ularning o‘zgarishi tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalariga bevosita ta’sir ko‘rsatadi. Tajribalar soni o‘zgarmas bo‘lgan holatda muvaffaqiyat ehtimolining ortishi matematik kutilmaning chiziqli ravishda oshishiga olib keladi. Biroq dispersiyaning o‘zgarishi chiziqli xarakterga ega emas, chunki $D(X) = np(1-p)$ Ushbu bog‘lanishdan ko‘rinadiki, $p =$

0,5 qiymatida $p(1-p)$ ko‘paytmasi maksimal qiymatga ega bo‘ladi. Shu sababli, n o‘zgarmas bo‘lganda binomial taqsimotning dispersiyasi $p = 0{,}5$ atrofida eng katta qiymatga erishadi.

Mazkur bog‘lanishni yanada batafsil tahlil qilish maqsadida tajribalar soni $(n = 20)$ o‘zgarmas holda, muvaffaqiyat ehtimoli (p) ning $(0{,}1)$ dan $(0{,}9)$ gacha bo‘lgan qiymatlari uchun $(M(X))$ va $(D(X))$ ko‘rsatkichlari hisoblandi.

Quyidagi jadvalda (p) ning turli qiymatlariga mos ravishda matematik kutilma va dispersiyaning o‘zgarishi keltirilgan.

1-jadval. (p) ning turli qiymatlariga mos ravishda matematik kutilma va dispersiyaning o‘zgarishi

(p)	(q=1-p)	(M(X)=np)	(D(X)=npq)
0,1	0,9	2	1,8
0,2	0,8	4	3,2
0,3	0,7	6	4,2
0,4	0,6	8	4,8
0,5	0,5	10	5,0
0,6	0,4	12	4,8
0,7	0,3	14	4,2
0,8	0,2	16	3,2
0,9	0,1	18	1,8

Jadval ma’lumotlarining tahlili shuni ko‘rsatadiki, $(n = 20)$ bo‘lgan holatda muvaffaqiyat ehtimoli p ning ortishi matematik kutilmaning muntazam ravishda oshishiga olib keladi. Masalan $p = 0{,}1$ bo‘lganda matematik kutilma $M(X) = 2$ ga teng bo‘lsa, $p = 0{,}5$ da $M(X) = 10, p = 0{,}9$ da esa $M(X) = 18$ ga teng bo‘ladi. Dispersiyaning o‘zgarishi esa boshqa xarakterga ega. p ning 0,1 dan 0,5 gacha ortishida dispersiya 1,8 dan 5,0 gacha oshadi. $p = 0{,}5$ qiymatida dispersiya maksimal qiymatga erishadi. Keyinchalik p ning 0,5 dan 0,9 gacha ortishi bilan dispersiya 5,0 dan 1,8 gacha kamayadi.

Ushbu natija $D(X) = np(1-p)$ formula orqali ham izohlanadi. Haqiqatan ham, $p = 0{,}5$ bo‘lganda $p(1-p) = 0{,}25$ maksimal qiymatni qabul qiladi. p ning 0 yoki 1 ga yaqinlashishi bilan $p(1-p)$ kamayadi va natijada dispersiya ham kichrayadi. Shunday qilib, binomial modelda $p = 0{,}5$ holati natijalarning eng katta noaniqlik darajasini ifodalaydi. p ning 0 yoki 1 ga yaqin qiymatlarida esa tajriba natijasi oldindan nisbatan aniqroq prognoz qilinadi.

Binomial taqsimot dispersiyasining ekstremal xususiyatini analitik tahlil qilish

Yuqoridagi parametrik tahlil natijalari tajribalar soni o‘zgarmas bo‘lgan holatda binomial taqsimot dispersiyasining muvaffaqiyat ehtimoli (p) ga nisbatan chiziqli bo‘lmagan tarzda o‘zgarishini ko‘rsatdi. Xususan, $(p = 0{,}5)$ bo‘lganda dispersiya maksimal qiymatga erishishi kuzatildi. Ushbu natijani analitik jihatdan asoslash uchun dispersiyaning (p) parametriga bog‘liqligini qaraymiz.

Agar tasodifiy miqdor $X \sim B\,(n)\,, p\,)$ binomial taqsimotga ega bo‘lsa, uning dispersiyasi quyidagi formula orqali aniqlanadi: $D(X) = np(1-p)$

Bu yerda (n) — mustaqil tajribalar soni, (p) — har bir tajribada muvaffaqiyatning yuz berish ehtimoli, $(q = 1-p)$ esa muvaffaqiyatsizlik ehtimolini ifodalaydi.

Tajribalar soni (n) ni o‘zgarmas deb qarab, dispersiyani muvaffaqiyat ehtimoli (p) ning funksiyasi sifatida quyidagicha ifodalaymiz: $D(p) = np(1-p)$

Qavslarni ochish natijasida dispersiya funksiyasi quyidagi kvadratik ko‘rinishga keladi: $D(p) = np - np^2$

Dispersiyaning qaysi (p) qiymatida ekstremumga erishishini aniqlash uchun $(D(p))$ funksiyadan (p) bo‘yicha birinchi tartibli hosila olamiz: $D'(p) = n - 2np$

Umumiy ko‘paytuvchi (n) ni qavsdan tashqariga chiqarib, hosilani quyidagi ko‘rinishda yozamiz: $D'(p) = n(1-2p)$. Funksiyaning ekstremumga erishishi uchun zaruriy shartga ko‘ra, uning birinchi tartibli hosilasi nolga teng bo‘lishi kerak. Shuning uchun $D'(p) = 0$

Bundan $n(1-2p) = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz.

Binomial modelda tajribalar soni musbat, ya’ni $n > 0$ bo‘lganligi sababli $1 - 2p = 0$.

Bundan $2p = 1$ va $p = \frac{1}{2} = 0{,}5$ natijaga ega bo‘lamiz.

Demak, (p=0,5) dispersiya funksiyasining kritik nuqtasi hisoblanadi. Ushbu kritik nuqtada dispersiya maksimum yoki minimum qiymatga erishishini aniqlash uchun (D(p)) funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz: $D''(p) = -2n$

Tajribalar soni $(n > 0)$ bo‘lganligi sababli $D''(p) = -2n < 0$

Ikkinchi tartibli hosilaning manfiy bo‘lishi $(D(p))$ funksiyaning $(p = 0{,}5)$ kritik nuqtada maksimumga erishishini ko‘rsatadi. Demak, tajribalar soni (n) o‘zgarmas bo‘lganda binomial taqsimot dispersiyasi muvaffaqiyat ehtimoli $p = 0{,}5$ bo‘lgan holatda eng katta qiymatni qabul qiladi.

Endi dispersiyaning maksimal qiymatini aniqlaymiz. Buning uchun $p = \frac{1}{2}$ qiymatni dispersiyaning $D(X) = np(1-p)$ formulasiga qo‘yamiz:

$$D_{max}(X) = n \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$D_{max}(X) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$D_{max}(X) = \frac{n}{4}$$

Shunday qilib, tajribalar soni o‘zgarmas bo‘lgan binomial modelda dispersiyaning maksimal qiymati $D_{max}(X) = \frac{n}{4}$ $p = q = 0{,}5$ bo‘lgan holatda yuzaga keladi.

Tajribalar sonining binomial modelning sonli xarakteristikalariga ta’siri

Binomial modelning xususiyatlarini to‘liqroq tahlil qilish uchun muvaffaqiyat ehtimoli (p) o‘zgarmas bo‘lgan sharoitda tajribalar soni (n) ning matematik kutilma, dispersiya va standart og‘ishga ta’sirini ko‘rib chiqamiz. Agar (X) tasodifiy miqdor binomial taqsimotga ega bo‘lsa

$$X \sim B(n, p)$$

$$D(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X)) = \sqrt{\text{n p } (1-\text{p})}$$

Mazkur bog‘lanishlarni sonli jihatdan tahlil qilish uchun muvaffaqiyat ehtimolini

$$p = 0{,}5 \quad q = 1 - p = 0{,}5$$

$$M(X) = 0{,}5n$$

$$D(X) = n \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$$

$$D(X) = 0{,}25\, n$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}25\ \text{n}}$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Demak, jadvalga kiritadigan sonlar:

2-jadval.

n	p	$M(X)$		$D(X)$	$\sigma(X)$
10	0,5	5		2,5	1,58
20	0,5	10		5	2,24
50	0,5	25		12,5	3,54
100	0,5	50		25	5

Jadval natijalaridan ko‘rinadiki, $(p = 0{,}5)$ o‘zgarmas bo‘lgan sharoitda (n) ning 10 dan 100 gacha ortishi matematik kutilmaning 5 dan 50 gacha, dispersiyaning esa 2,5 dan 25 gacha ortishiga olib keladi. Bu holat matematik kutilma va dispersiyaning (n) ga nisbatan chiziqli bog‘langanligini tasdiqlaydi.

Standart og‘ishning o‘zgarishi esa chiziqli emas.

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

bo‘lganligi sababli, p o‘zgarmas sharoitda standart og‘ish tajribalar sonining kvadrat ildiziga mutanosib ravishda o‘zgaradi: $\sigma(X) \sim \sqrt{n}$

$$n_1 = 10\,, \qquad n_n = 100$$

gacha oshirilganda standart og‘ish 10 marta emas, balki

$$\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{10} \approx 3\,16$$

marta ortadi. Haqiqatan ham, $n = 10$ bo‘lganda $\sigma_1 = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58$

$n = 100$ bo‘lganda esa $\sigma_2 = \sqrt{25} \approx 5$ ularning nisbati esa

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \approx \frac{n_1}{n_2} \approx 3{,}16$$

Binomial modelda nisbiy tarqalishni variatsiya koeffitsiyenti asosida tahlil qilish

Yuqoridagi tahlil natijalari tajribalar soni (n) ortishi bilan binomial tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va standart og‘ishi ham ortishini ko‘rsatdi. Biroq standart og‘ish tasodifiy miqdorning absolyut tarqalishini ifodalaydi. Tajribalar soni ortishi bilan matematik kutilma ham ortadi. Shu sababli natijalarning tarqalishini matematik kutilmaga nisbatan ham baholash zarur. Buning uchun variatsiya koeffitsiyentidan foydalanamiz.

Variatsiya koeffitsiyenti standart og‘ishning matematik kutilmaga nisbatiga teng:

$$CV = \frac{\sigma(X)}{M(X)}$$

$$M(X) = np$$

$$D(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

$$CV = \frac{\sqrt{np(1-p}}{np}$$

Bu formula binomial taqsimotda nisbiy tarqalishning tajribalar soni (n) va muvaffaqiyat ehtimoli (p) ga bog‘liqligini ifodalaydi. Oldingi hisoblashlar bilan taqqoslash uchun muvaffaqiyat ehtimolini o‘zgarmas deb olib, $p = 0{,}5 \;\; 1 - p = 0{,}5$

$$CV = \sqrt{\frac{0{,}5}{0{,}5n}}, \;\; CV = \sqrt{\frac{1}{n}}, \;\; CV = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$n = 10 \quad CV = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}316 \quad CV \approx 31{,}6\%$$

$$n = 20 \quad CV = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx 0{,}224 \quad CV \approx 22{,}4\%$$

$$n = 50 \quad CV = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0{,}141 \quad CV \approx 14{,}1\%$$

$$n = 100 \quad CV = \frac{1}{\sqrt{100}} \approx 0{,}1 \quad CV \approx 10\%$$

Olingan natijalarni quyidagi jadval orqali umumlashtirish mumkin.

3-jadval.

Tajribalar soni n	Matematik kutilma M(X)	Standart og‘ish σ(X)	CV	CV, %
10	5	1,58	0,316	31,6
20	10	2,24	0,224	22,4
50	25	3,54	0,141	14,1
100	50	5,00	0,100	10,0

Jadval ma’lumotlaridan ko‘rinadiki, tajribalar soni $(n = 10)$ dan $(n = 100)$ gacha ortishi bilan standart og‘ish (1,58) dan (5,00) gacha oshadi. Biroq variatsiya koeffitsiyenti aksincha, (31,6%) dan (10%) gacha kamayadi.

Demak, tajribalar sonining ortishi tasodifiy miqdorning absolyut tarqalishini oshirsa-da, uning matematik kutilmaga nisbatan nisbiy tarqalish darajasini kamaytiradi.

Bu natijani tajribalar sonining 10 marta ortishi misolida ham ko‘rish mumkin. Tajribalar sonining o‘zgarish nisbati: $\frac{100}{10} = 10$ Variatsiya koeffitsiyenti esa 31,6% dan 10% gacha kamaygan. $\frac{31{,}6}{10} = 3{,}16$ Demak, variatsiya koeffitsiyenti taxminan 3,16 marta kamaygan. $\sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{10} = 3{,}16$

$$\frac{CV_{10}}{CV_{100}} = \frac{31{,}6}{10} \approx \sqrt{\frac{100}{10}} = 3{,}16$$

Binomial model asosida texnologik jarayonni statistik nazorat qilish: Binomial taqsimot modeli ishlab chiqarish va texnologik jarayonlarda mahsulot sifatini statistik nazorat qilish masalalarida samarali qo‘llanilishi mumkin. Agar ishlab chiqarilgan har bir mahsulot belgilangan sifat talablariga **javob beradi** yoki **javob bermaydi** kabi ikki holatdan biri bilan tavsiflansa, bunday jarayonni Bernulli tajribalari ketma-ketligi sifatida modellashtirish mumkin. Tekshirilayotgan i-mahsulotning sifat holatini Y_i tasodifiy miqdor orqali quyidagicha belgilaymiz:

$$Y_i = \begin{cases} 1, agar\ mahsulot\ nuqsonsiz\ bo'lsa \\ 0, agar\ \ mahsulot\ nuqsonli\ bo'lsa \end{cases}$$

Bunda:

$$P(Y_i = 1) = p, \quad P(Y_i = 0) = 1 - p = q.$$

Agar nazorat jarayonida jami n ta mahsulot tekshirilsa, ular orasidagi nuqsonsiz mahsulotlar sonini

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

tasodifiy miqdor orqali ifodalash mumkin. Mahsulotlarning sifat holatlari o‘zaro mustaqil va ularning nuqsonsiz bo‘lish ehtimoli p o‘zgarmas deb qaralganda,

$$X \sim Bin(n, p)$$

binomial model hosil bo‘ladi.

Ushbu model yordamida nazorat qilinayotgan partiyadagi nuqsonsiz mahsulotlarning kutilayotgan soni va ularning tarqalish darajasi quyidagicha aniqlanadi:

$$M(X) = np,$$

$$D(X) = np(1-p),$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Bu ko‘rsatkichlar texnologik jarayonning joriy holatini statistik jihatdan baholash uchun asos bo‘lib xizmat qiladi. Matematik kutilma normal ish sharoitida kutilayotgan nuqsonsiz mahsulotlar sonini, standart og‘ish esa kuzatilayotgan natijalarning ushbu kutilayotgan qiymat atrofida qanchalik tarqalishini tavsiflaydi.

Texnologik jarayonda bir vaqt oralig‘ida $n = 20$ ta mahsulot nazorat qilinsin. Har bir mahsulotning sifat talablariga javob berish, ya’ni nuqsonsiz bo‘lish ehtimoli $p = 0.9$ deb olamiz. U holda nuqsonli mahsulotning yuzaga kelish ehtimoli

$$q = 1 - p = 1 - 0.9 = 0.1$$

ga teng bo‘ladi.

Tekshirilayotgan 20 ta mahsulot orasidagi nuqsonsiz mahsulotlar sonini X bilan belgilasak,

$$X \sim Bin(20{,}0.9)$$

binomial modelga ega bo‘lamiz.

Ushbu jarayonda nuqsonsiz mahsulotlarning kutilayotgan soni:

$$M(X) = np = 20 \cdot 0.9 = 18.$$

$$D(X) = np(1-p) = 20 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 1.8.$$

$$\sigma(X) = np(1-p) = 1.8 \approx 1.342.$$

Demak, nuqsonsiz mahsulotlar sonining matematik kutilma atrofidagi absolyut tarqalish darajasi taxminan **1,342 ta mahsulot**ni tashkil etadi. Ushbu ko‘rsatkichlardan texnologik jarayonning barqarorligini statistik baholash hamda kuzatilayotgan natijalarning kutilayotgan holatdan sezilarli darajada chetlanishini aniqlashda foydalanish mumkin.

Texnologik jarayonning barqarorligini baholash uchun statistik nazoratda ko‘pincha matematik kutilma atrofidagi 3σ chegaralaridan foydalaniladi. Binomial model uchun pastki va yuqori nazorat chegaralari quyidagicha aniqlanadi:

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)},$$

$$\mathrm{UCL} = np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

$$n = 20, p = 0.9, \;\; M(X) = 18, \qquad \sigma(X) \approx 1.342.$$

Shuning uchun pastki nazorat chegarasi:

$$LCL = 18 - 3 \cdot 1{,}342$$

$$LCL = 18 - 4.026 = 13{,}974.$$

Yuqori nazorat chegarasi esa:

$$UCL = 18 + 3 \cdot 1.342$$

$$UCL = 18 + 4.026 = 22.026.$$

Biroq tekshirilayotgan mahsulotlar soni $n = 20$ ta bo‘lganligi sababli nuqsonsiz mahsulotlar soni 20 tadan ortiq bo‘lishi mumkin emas. Shu sababli yuqori nazorat chegarasi amaliy jihatdan $UCL = 20,$ deb olinadi. Pastki chegara esa diskret qiymatlarni hisobga olgan holda taxminan $LCL \approx 14,$ ga teng bo‘ladi.

Binomial tasodifiy miqdor faqat butun qiymatlarni qabul qilganligi sababli, $LCL = 13.974$ natijaga ko‘ra, $X \geq 14$ qiymatlar nazorat chegarasi ichida, $X \leq 13$ qiymatlar esa nazorat chegarasidan tashqarida deb qaraladi. $X \leq 20$ bo‘lganligi sababli yuqori nazorat chegarasi amaliy jihatdan 20 bilan cheklanadi.

Demak, 20 ta mahsulotdan iborat nazorat guruhida nuqsonsiz mahsulotlar soni 14 tadan 20 tagacha bo‘lsa, kuzatilayotgan natijalar berilgan statistik model doirasida kutiladigan chegaralarda deb qaraladi. Agar nuqsonsiz mahsulotlar soni 13 ta yoki undan kam bo‘lsa, kuzatilgan qiymat pastki nazorat chegarasidan

tashqarida joylashadi va bu texnologik jarayonda sifat ko‘rsatkichining kutilgan holatdan chetlanishini bildiruvchi statistik signal sifatida baholanadi.

Zamonaviy ishlab chiqarish tizimlarida mahsulot sifatini nazorat qilish jarayoni sensorlar, o‘lchash qurilmalari va avtomatik ma’lumotlarni qayta ishlash vositalari yordamida amalga oshirilishi mumkin. Bunday tizimda har bir mahsulotning belgilangan sifat talablariga mos yoki mos emasligi aniqlanib, natija mos ravishda 1 yoki 0 qiymat bilan ifodalanadi.

Nazorat jarayonining umumiy ketma-ketligini quyidagicha ifodalash mumkin:

Sensor→ma’lumotlarni yig‘ish→mahsulot holatini aniqlash→binomial model→statistik bahola h→nazorat signali.

Har bir nazorat guruhida n ta mahsulot tekshiriladi va nuqsonsiz mahsulotlar soni X avtomatik ravishda aniqlanadi. Olingan X qiymati oldindan hisoblangan statistik nazorat chegaralari bilan taqqoslanadi.

Agar:

$$LCL \leq X \leq UCL$$

shart bajarilsa, kuzatilgan natija belgilangan statistik chegaralar doirasida deb baholanadi.

Agar:

$$X < LCL$$

bo‘lsa, tizim mahsulot sifatining kutilgan darajadan pasayganligini ko‘rsatuvchi statistik signalni shakllantirishi mumkin. Bunday signal operatorga texnologik parametrlarni tekshirish, ishlab chiqarish sharoitlarini tahlil qilish va zarur hollarda tegishli boshqaruv choralarini ko‘rish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.

Shunday qilib, binomial modelni avtomatlashtirilgan nazorat tizimiga kiritish ikki natijali sifat ko‘rsatkichlarini matematik-statistik usulda qayta ishlash, jarayon holatini muntazam baholash hamda statistik jihatdan sezilarli chetlanishlarni o‘z vaqtida aniqlash imkonini beradi.

Yuqorida aniqlangan statistik nazorat chegaralari asosida turli kuzatuv natijalarini quyidagicha baholash mumkin:

4-jadval.

Tekshirilgan mahsulotlar soni n	**Nuqsonsiz mahsulotlar soni X**	**Nazorat chegarasi**	**Statistik baho**
20	18	$14 \leq X \leq 20$	Me’yoriy chegarada
20	16	$14 \leq X \leq 20$	Me’yoriy chegarada
20	14	$14 \leq X \leq 20$	Nazorat chegarasi ichida
20	12	$X < 14X < 14$	Nazorat chegarasidan tashqarida

Jadvaldan ko‘rinadiki, $X = 18$ va $X = 16$ bo‘lgan holatlarda kuzatilgan natijalar statistik nazorat chegaralari ichida joylashadi. X=14 qiymati nazorat chegarasi ichidagi eng kichik butun qiymat hisoblanadi. Agar $X = 12$ bo‘lsa, kuzatilgan qiymat pastki nazorat chegarasidan kichik bo‘lib, texnologik jarayonda sifat ko‘rsatkichining kutilgan darajadan pasayganligini bildiruvchi statistik signal yuzaga keladi.

Shunday qilib, binomial model asosida aniqlangan nazorat chegaralari ishlab chiqarish jarayonida mahsulot sifatining o‘zgarishini miqdoriy baholash imkonini beradi. Ushbu yondashuv avtomatlashtirilgan nazorat tizimida kuzatuv natijalarini real vaqt rejimida qayta ishlash, belgilangan statistik chegaralardan chetlanishlarni aniqlash va operatorga ogohlantiruvchi signal uzatish uchun matematik asos sifatida qo‘llanilishi mumkin.

3σ tamoyili va aniq binomial ehtimollik asosidagi nazorat chegaralarining qiyosiy tahlili. Yuqoridagi hisoblashlarda texnologik jarayonning statistik nazorat chegaralari matematik kutilma va standart og‘ishga asoslangan 3σ tamoyili yordamida aniqlandi. Mazkur yondashuv amaliy statistik nazoratda qulay bo‘lsa-da, binomial tasodifiy miqdor diskret taqsimotga ega bo‘lganligi sababli nazorat chegaralarini uning aniq ehtimollik funksiyasi asosida ham baholash mumkin. Shu maqsadda $n = 20$ va $p = 0{,}9$ parametrli binomial model uchun pastki kritik chegarani kumulyativ ehtimollik asosida aniqlaymiz.

$$X \sim Bin(20; 0{,}9)$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} (\frac{20}{i})(0{,}9)^{\mathrm{i}}\,(0{,}1)^{20-\mathrm{i}}$$

formula orqali kk yoki undan kam nuqsonsiz mahsulot kuzatilishining aniq ehtimoli hisoblanadi. Statistik ahamiyatlilik darajasini $\alpha = 0{,}05$ deb qabul qilamiz. U holda pastki kritik chegara quyidagi shart asosida aniqlanadi:

$$P(X \leq k) \leq 0{,}05.$$

$X \sim Bin(20; 0{,}9)$ uchun kumulyativ ehtimolliklarni hisoblasak:

$$P(X \le 13) \approx 0{,}00239,$$
$$P(X \le 15) \approx 0{,}04317,$$
$$P(X \le 16) \approx 0{,}13295.$$

Biz $\alpha = 0{,}05$ deb olgan edik. Shuning uchun $P(X \le 15) < 0{,}05$ lekin $P(X \le 16) > 0{,}05$. Demak, aniq binomial ehtimollik bo‘yicha **eng katta kritik qiymat** $k = 15$ bo‘ladi.

5-jadval.

Nazorat usuli	Qabul qilinadigan qiymatlar	Statistik signal	Izoh
3σ tamoyili	$14 \le X \le 2014$	$X \le 13$	Matematik kutilma va standart og‘ishga asoslangan taxminiy chegara
Aniq binomial usul, $\alpha = 0{,}05$	$16 \le X \le 20$	$X \le 15$	Binomial taqsimotning aniq kumulyativ ehtimoliga asoslangan chegara

Qiyosiy tahlil natijalari 3σ tamoyili va aniq binomial ehtimollik usuli bir xil nazorat chegarasini bermasligini ko‘rsatdi. 3σ yondashuvida $X \le 13$ qiymatlar statistik signal sifatida baholansa, $\alpha = 0{,}05$ darajadagi aniq binomial yondashuvda $X \le 15$ qiymatlar ham kritik sohaga kiradi. Demak, mazkur parametrlar uchun aniq binomial usul sifat ko‘rsatkichining pasayishiga nisbatan sezgirroq nazorat mezonini shakllantiradi.

Mazkur farq binomial taqsimotning diskret tabiati bilan bog‘liq bo‘lib, kichik hajmli nazorat guruhlarida normal yaqinlashuvga asoslangan 3σ chegaralari dan foydalanishda ehtiyotkorlik zarurligini ko‘rsatadi. Shu sababli n kichik yoki muvaffaqiyat ehtimoli 0 yoki 1 ga yaqin bo‘lgan holatlarda aniq binomial ehtimolliklardan foydalanish statistik nazoratning asoslanganligini oshirishi mumkin.

Xulosa. Tasodifiy jarayonlarni matematik modellashtirish noaniqlik sharoitida yuzaga keladigan hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini aniqlash va ularning miqdoriy xususiyatlarini baholash imkonini beradi. Tadqiqot davomida tasodifiy hodisa, tasodifiy miqdor, taqsimot qonuni, matematik kutilma, dispersiya va standart og‘ish tushunchalarining tasodifiy jarayonlarni modellashtirishdagi o‘rni nazariy jihatdan yoritildi.

Takroriy va o‘zaro mustaqil ikki natijali tajribalarni modellashtirishda binomial taqsimotning xususiyatlari tahlil qilindi. Parametrik tahlil natijasida tajribalar soni n o‘zgarmas bo‘lganda muvaffaqiyat ehtimoli p ning ortishi matematik kutilmaning chiziqli o‘sishiga olib kelishi, dispersiya esa $p = 0.5$ bo‘lganda maksimal qiymatga erishishi analitik jihatdan asoslandi. Shuningdek, p o‘zgarmas sharoitda tajribalar sonining ortishi matematik kutilma va dispersiyaning chiziqli, standart og‘ishning esa $\sqrt{n}$ qonuniyatiga muvofiq o‘sishiga olib kelishi ko‘rsatildi. Variatsiya koeffitsiyenti asosidagi tahlil esa tajribalar soni ortishi bilan nisbiy tarqalish darajasining kamayishini ko‘rsatdi. Binomial modelning amaliy qo‘llanilishi $n = 20$ va $p = 0.9$ parametrli texnologik jarayon misolida ko‘rib chiqildi. Bunda nuqsonsiz mahsulotlarning kutilayotgan soni

$$M(X) = 18,$$
$$D(X) = 1.8,$$
$$\sigma(X) \approx 1.342$$

ekanligi aniqlandi. Shuningdek, 20 ta mahsulotdan aynan 18 tasining nuqsonsiz bo‘lish ehtimoli taxminan 0,285 ya’ni **28,5 %** ni tashkil etishi hisoblandi.

Texnologik jarayonni statistik nazorat qilish uchun 3σ tamoyili asosida nazorat chegaralari shakllantirildi. Hisoblash natijasida pastki nazorat chegarasi $LCL \approx 14$ ga teng bo‘lib, yuqori chegara tekshirilayotgan mahsulotlarning maksimal sonini hisobga olgan holda $UCL = 20$ deb qabul qilindi. Shu asosda nuqsonsiz mahsulotlar sonining pastki nazorat chegarasidan kamayishi texnologik jarayonda sifat ko‘rsatkichlarining kutilgan holatdan chetlanishini bildiruvchi statistik signal sifatida talqin qilindi.

Bundan tashqari, 3σ tamoyili asosida olingan taxminiy nazorat chegaralari binomial taqsimotning aniq kumulyativ ehtimollari asosidagi kritik chegara bilan qiyoslandi. $n = 20$, $p = 0{,}9$ va $\alpha = 0{,}05$ sharoitida 3σ yondashuvi bo‘yicha $X \le 13$ qiymatlar statistik signal sifatida baholangan bo‘lsa, aniq binomial usulda $P(X \le 15) \approx 0{,}04317 < 0{,}05$ va $P(X \le 16) \approx 0{,}13295 > 0{,}05$ ekanligi aniqlandi. Natijada aniq binomial yondashuvda $X \le 15$ kritik soha sifatida belgilandi. Ushbu qiyosiy natija kichik hajmli va muvaffaqiyat ehtimoli chegaraviy qiymatlarga yaqin bo‘lgan binomial jarayonlarda aniq ehtimollik hisoblariga asoslangan nazorat mezoni 3σ yondashuviga nisbatan sezgirroq bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatdi.

Taklif etilgan yondashuvda mahsulot holatini sensorlar yordamida aniqlash, olingan ma’lumotlarni binomial model asosida qayta ishlash, kuzatilgan natijalarni statistik nazorat chegaralari bilan taqqoslash va chegaradan tashqaridagi holatlarda ogohlantiruvchi signal shakllantirish imkoniyati ko‘rsatildi. Natijada binomial model nafaqat takroriy tasodifiy jarayonlarning ehtimoliy xususiyatlarini tavsiflash, balki ikki

natijali sifat ko‘rsatkichlariga ega texnologik jarayonlarni avtomatlashtirilgan statistik nazorat qilish uchun ham matematik asos sifatida qo‘llanilishi mumkinligi asoslandi.

ADABIYOTLAR:

1. *Ross S. M. A First Course in Probability. 10th ed. — Pearson, 2019.*
2. *Ross S. M. Introduction to Probability Models. 13th ed. — Academic Press (Elsevier), 2023.*
3. *Grimmett G. R., Stirzaker D. R. Probability and Random Processes. 4th ed. — Oxford University Press, 2020.*
4. *Schinazi R. B. Probability with Statistical Applications. — Springer, 2022.*
5. *Illowsky B., Dean S. Statistics. — Houston: OpenStax, 2020.*
6. *NIST/SEMATECH. e-Handbook of Statistical Methods. Binomial Distribution. — National Institute of Standards and Technology.*
7. *Philippou A. N., Antzoulakos D. L. “Binomial Distribution” // International Encyclopedia of Statistical Science. — Springer, 2025. — P. 306–309.*