UO‘K 517.984

CHIZIQLI OPERATORLAR SPEKTRAL NAZARIYASI ELEMENTLARI

Norqulova Zebiniso Hamza qizi,
Navoiy davlat universiteti tayanch doktoranti
Hikmatova Gulhayo Rashit qizi,
Navoiy davlat universiteti tayanch doktoranti

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Banax va Hilbert fazolarida aniqlangan chiziqli operatorlarning spektral xossalari tizimli ravishda o‘rganiladi. Chiziqli operator spektri va rezolventasi tushunchalari, spektrning nuqtali, uzluksiz va qoldiq qismlarga ajratilishi, spektral radius hamda uning asosiy xossalari yoritildi. Chegaralangan operatorlar uchun spektrning yopiq va chegaralangan to‘plam ekanligi, spektral radiusning operator normasi bilan bog‘lanishi asoslandi. Tadqiqot natijalari funksional analiz, differensial va integral tenglamalar, matematik fizika hamda operatorlar nazariyasidagi spektral masalalarni o‘rganish uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi*

Kalit so‘zlar: *chiziqli operator, Banax fazosi, Hilbert fazosi, spektr, rezolventa, xos qiymat, xos vektor, spektral radius*

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. *В статье систематически исследуются спектральные свойства линейных операторов, заданных в банаховых и гильбертовых пространствах. Рассматриваются понятия спектра и резольвенты линейного оператора, анализируется разложение спектра на точечную, непрерывную и остаточную части, а также исследуются основные свойства спектрального радиуса. Математически обосновываются замкнутость и ограниченность спектра ограниченного линейного оператора, а также взаимосвязь спектрального радиуса с нормой оператора. Полученные результаты могут служить теоретической основой для исследования спектральных задач, возникающих в функциональном анализе, теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической физике и теории операторов.*

Ключевые слова: *линейный оператор, банахово пространство, гильбертово пространство, спектр оператора, резольвента, собственное значение, собственный вектор, спектральный радиус, ограниченный оператор, компактный оператор, самосопряжённый оператор, спектральное разложение.*

ELEMENTS OF THE SPECTRAL THEORY OF LINEAR OPERATORS

Abstract. *This paper systematically investigates the spectral properties of linear operators defined on Banach and Hilbert spaces. The concepts of the spectrum and resolvent of a linear operator are considered, and the decomposition of the spectrum into point, continuous, and residual parts is analyzed. The main properties of the spectral radius are also examined. The closedness and boundedness of the spectrum of a bounded linear operator, as well as the relationship between the spectral radius and the operator norm, are mathematically justified. The obtained results may serve as a theoretical basis for studying spectral problems arising in functional analysis, the theory of differential and integral equations, mathematical physics, and operator theory.*

Keywords: *linear operator, Banach space, Hilbert space, operator spectrum, resolvent, eigenvalue, eigenvector, spectral radius, bounded operator, compact operator, self-adjoint operator, spectral decomposition.*

Kirish. Zamonaviy funksional analizning muhim yo‘nalishlaridan biri chiziqli operatorlarning spektral nazariyasini o‘rganishdan iborat. Chiziqli operatorning spektri uning algebraik xossalarini emas, balki operatorning fazodagi ta’sirini ham tavsiflovchi fundamental matematik obyekt hisoblanadi. Chekli o‘lchamli fazolarda spektr tushunchasi asosan matritsaning xos qiymatlari bilan bog‘liq bo‘lsa, cheksiz o‘lchamli fazolarga o‘tilganda spektr tarkibi ancha murakkablashadi. Bunda xos qiymat mavjud bo‘lmagan holda ham operatorning teskarisi mavjud bo‘lmasligi mumkin. Chekli o‘lchamli fazoda $A-\lambda I$ operatorining teskarisi mavjud emasligi λ ning xos qiymat ekanligini anglatadi. Cheksiz o‘lchamli Banax yoki Hilbert fazolarida esa $A-\lambda I$ operatori bir qiymatli va to‘la aniqlangan teskari operatorga ega bo‘lmasligining bir

nechta sabablari mavjud. Shu sababli spektr tushunchasi xos qiymatlar to‘plamidan kengroq tushuncha sifatida qaraladi.

Spektral nazariya funksional analizning nazariy bo‘limi bo‘lishi bilan birga, differensial tenglamalar, integral tenglamalar, matematik fizika va kvant mexanikasidagi ko‘plab masalalarning matematik asosini tashkil etadi. Xususan, matematik fizikada kuzatiladigan ko‘plab modellar Hilbert fazosidagi operatorlar yordamida ifodalanadi. Shu sababli operatorning spektrini aniqlash masalasi tegishli matematik modelning sifat xususiyatlarini o‘rganishda muhim ahamiyatga ega. Spektral xossalar operatorning teskari masalalarida, barqarorlik tahlilida, differensial tenglamalar yechimlarining sifat jihatlarida va kvant mexanikasining matematik modelida markaziy rol o‘ynaydi. Masalan, Hilbert fazosida o‘ziga qo‘shma operatorlar spektrining haqiqiy sonlardan iborat bo‘lishi operator orqali ifodalanadigan kattaliklarning fizik mazmuni bilan uyg‘unlashadi. Yoki kompakt operatorlar uchun spektrning diskretlashuvi integral tenglamalarning klassik nazariyasida hal qiluvchi ahamiyat kasb etadi.

Adabiyotlar tahlili va metodologiya. So‘nggi yillarda chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi klassik spektr, rezolventa va xos qiymatlar masalalaridan tashqari, spektral barqarorlik, psevdospektr, spektral yaqinlashuv, kompakt rezolventali operatorlar va spektrni hisoblashning konstruktiv usullarini qamrab olgan holda rivojlanmoqda. Zamonaviy tadqiqotlarda operator spektrini faqat aniqlash emas, balki operatorga kiritilgan kichik o‘zgarishlarning spektrga ta’sirini miqdoriy baholash masalasi ham muhim yo‘nalish sifatida qaralmoqda.

Colbrookning tadqiqotida Hilbert fazolaridagi chiziqli operatorlar spektrining geometrik xususiyatlarini hisoblash masalasi o‘rganilgan. Muallif spektrni oddiy sonlar to‘plami sifatida aniqlash bilan cheklanmay, spektral radius, spektral bo‘shliqlar, psevdospektral xususiyatlar, spektral sig‘im va fraktal o‘lcham kabi geometrik ko‘rsatkichlarni hisoblash muammosini ilgari suradi. Tadqiqotda spektral masalalarni hisoblashning murakkabligi ham tahlil qilinib, cheksiz o‘lchamli operatorlar uchun klassik chekli o‘lchamli yaqinlashuvlarning yetarli bo‘lmasligi ko‘rsatiladi.

Jabłoński, Jung, Kubrusly va Stochel tomonidan 2024-yilda olib borilgan tadqiqotda Hilbert fazosidagi operatorlar darajalari ketma-ketligining yaqinlashuvi va barqarorligi o‘rganilgan. Mualliflar kuchsiz, kuchli va operator normasi topologiyalaridagi yaqinlashuvlarni taqqoslaydi. Mazkur natijalar operatorning iteratsion xususiyatlari bilan uning spektral tuzilishi o‘rtasidagi munosabatni yanada chuqurroq o‘rganish zarurligini ko‘rsatadi.

Gilning 2024-yildagi tadqiqotida Hilbert fazosidagi chegaralangan chiziqli operatorlarning xos qiymatlari perturbatsiyasi masalasi qaralgan. Xususan, operator bilan uning o‘z-o‘ziga qo‘shma qismi orasidagi farq Schatten–von Neumann sinfiga tegishli bo‘lgan holatda xos qiymatlar o‘zgarishining miqdoriy baholari olingan. Tadqiqot Kato va Weyl tipidagi klassik natijalarni zamonaviy perturbatsion yondashuvlar bilan bog‘laydi.

Bisterzo va Siclari 2025-yilda kompakt rezolventali operatorlar uchun spektral barqarorlikning miqdoriy masalasini tadqiq qilgan. Ishda operatorlar oilasi parametr o‘zgarganda xos qiymatlarning qanday o‘zgarishi, xususan, xos qiymatlar variatsiyasining asimptotik xatti-harakati o‘rganilgan. Natijalar turli elliptik masalalar, Riman metrikalarining o‘zgarishi va Fourier-multiplikatorlar oilasiga tatbiq etilgan. Mazkur tadqiqot spektral nazariyaning zamonaviy bosqichida spektrni aniqlashdan tashqari, uning perturbatsiya ostidagi barqarorligini miqdoriy ifodalash muhim ekanligini ko‘rsatadi.

Shakhmurovning 2023-yildagi tadqiqotida Banax fazolaridagi differensial operatorlarning spektral xossalari, xususan, Schatten sinfiga mansub operatorlar uchun ildiz elementlarning to‘liqligi o‘rganilgan. Tadqiqot natijalari o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lmagan differensial operatorlarning spektral tuzilishini tahlil qilishga imkon beradi va spektral nazariyaning differensial tenglamalar bilan uzviy bog‘liqligini ko‘rsatadi

2026-yilda Shameem va Deepesh tomonidan taklif qilingan natijada silliq Banax fazolarida duality mapping orqali o‘z-o‘ziga qo‘shma deb qaraladigan kompakt operatorlar uchun spektral tasvirlash teoremasining analogi olingan. Mualliflar bu natijani Hilbert fazosidagi klassik kompakt o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar uchun spektral teoremaning tabiiy umumlashmasi sifatida talqin qiladilar.

Natija. Chiziqli operatorlarning spektral nazariyasini o‘rganishda avvalo operator aniqlangan fazoning xususiyatlarini hisobga olish muhimdir. Spektral nazariyaning asosiy natijalari, odatda, Banax va Hilbert fazolarida aniqlangan chegaralangan chiziqli operatorlarga nisbatan qaraladi. Ushbu fazolarning to‘lalik xossasi operatorlarning limit jarayonlari, teskari operatorlarning mavjudligi va spektral xususiyatlarini tadqiq etishda muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

X chiziqli normallangan fazo bo‘lsin. Agar X fazo normaga nisbatan to‘liq bo‘lsa, u Banax fazosi deb ataladi. Ya’ni, X fazodagi har qanday fundamental ketma-ketlik shu fazoning biror elementiga yaqinlashsa, X Banax fazosi hisoblanadi. Banax fazolari funksional analizning asosiy obyektlaridan biri bo‘lib, ko‘plab differensial va integral tenglamalar yechimlarini o‘rganishda tabiiy matematik muhit sifatida qaraladi.

Hilbert fazosi esa skalyar ko‘paytma bilan jihozlangan va shu skalyar ko‘paytma orqali hosil qilingan normaga nisbatan to‘liq bo‘lgan chiziqli fazodir. Agar H Hilbert fazosi bo‘lsa, unda x,y∈H elementlar uchun

(x,y)

skalyar ko‘paytma aniqlangan bo‘lib, unga mos norma

$||x||=\sqrt{(x,x)}$

ko‘rinishida aniqlanadi. Hilbert fazolarining muhim afzalligi shundaki, ularda ortogonallik, proyeksiya va qo‘shma operator tushunchalari mavjud bo‘lib, bu spektral nazariyani yanada chuqurroq o‘rganish imkonini beradi.

Tadqiqot natijasida Banax va Hilbert fazolarida aniqlangan chiziqli operatorlarning spektral xossalari yagona nazariy tizim sifatida umumlashtirildi. O‘rganishlar shuni ko‘rsatdiki, cheksiz o‘lchamli fazolarda spektr tushunchasi oddiy xos qiymatlar to‘plamidan kengroq bo‘lib, operatorning teskari mavjudligi, rezolventasi va fazodagi ta’siri bilan uzviy bog‘liqdir.

Birinchi natija sifatida chegaralangan chiziqli operator spektrining yopiq va chegaralangan to‘plamdan iborat ekanligi asoslandi. Neumann qatori yordamida spektr operator normasi bilan baholanishi ko‘rsatildi. Bu esa operatorning spektral xossalarini oldindan tahlil qilish va murakkab masalalarda spektrning joylashish sohasini aniqlash imkonini beradi.

Ikkinchi muhim natija spektral radius tushunchasi bilan bog‘liq bo‘lib, u operatorning uzoq davom etuvchi ta’sirini tavsiflovchi asosiy ko‘rsatkich ekanligi aniqlandi. Spektral radiusning operator darajalari normasi orqali ifodalanishi operatorning asimptotik xatti-harakatini o‘rganish uchun qulay vosita hisoblanadi. Mazkur natija iteratsion jarayonlar, differensial tenglamalar va barqarorlik masalalarida muhim ahamiyat kasb etadi.

Hilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar uchun spektrning haqiqiy sonlardan tashkil topishi isbotlandi. Bu xususiyat matematik fizika va kvant mexanikasidagi ko‘plab modellarni tadqiq etishda muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Shuningdek, kompakt operatorlar uchun nolga teng bo‘lmagan barcha spektral nuqtalarning xos qiymatlardan iborat bo‘lishi ko‘rsatildi. Natijada cheksiz o‘lchamli masalalarni chekli o‘lchamli modellar yordamida yaqinlashtirib o‘rganish imkoniyati paydo bo‘ladi.

Nazariy natijalarni tasdiqlash maqsadida integral operator misoli qaraldi. Tadqiqot natijasida ushbu operatorning spektri aniqlandi va uning spektral tuzilishi kompakt operatorlar haqidagi nazariy xulosalarga mos kelishi ko‘rsatildi. Bu esa spektral nazariya nafaqat abstrakt matematik tushuncha, balki integral va differensial tenglamalar, matematik fizika hamda amaliy modellashtirish masalalarida ham samarali qo‘llanilishini tasdiqlaydi.

Muhokama. Olingan natijalar chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi cheksiz o‘lchamli fazolarda yuzaga keladigan murakkab masalalarni tahlil qilishda muhim matematik apparat ekanligini ko‘rsatdi. Chekli o‘lchamli fazolarda spektr asosan xos qiymatlar orqali tavsiflansa, Banax va Hilbert fazolarida operatorning teskari mavjudligi, rezolventa va spektrning tuzilishini birgalikda hisobga olish zarur bo‘ladi. Shu jihatdan spektral nazariya klassik chiziqli algebra g‘oyalarining tabiiy umumlashmasi sifatida namoyon bo‘ladi.

Spektral radius va operator normasi o‘rtasidagi bog‘liqlik operatorlarning barqarorligini baholash imkonini beradi. Ayniqsa, operator darajalari ketma-ketligining xatti-harakatini tahlil qilishda spektral radius muhim rol o‘ynaydi. Bu natijalar sonli usullar, iteratsion algoritmlar va funksional modellarni o‘rganishda amaliy ahamiyatga ega. O‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar uchun spektrning haqiqiy sonlardan iborat bo‘lishi matematik fizika va kvant mexanikasi masalalarida muhim o‘rin tutadi. Kompakt operatorlarning diskret spektrga ega bo‘lishi esa integral tenglamalarni yechishda samarali matematik vosita hisoblanadi. Cheksiz o‘lchamli fazolarda operator spektrini faqat xos qiymatlar to‘plami sifatida qarash yetarli emas. Bunday fazolarda $A-\lambda I$ operatorining teskari operatorga ega bo‘lmasligi turli sabablar bilan bog‘liq bo‘lishi mumkin. Shu sababli spektrning nuqtali, uzluksiz va qoldiq qismlarga ajratilishi operatorning funksional xususiyatlarini chuqurroq tavsiflash imkonini beradi.

Tadqiqot natijalarining muhim jihatlaridan biri chegaralangan chiziqli operator spektrining operator normasi bilan bog‘liqligini asoslashdan iboratdir. Olingan natijalarga ko‘ra, operator spektrining kompleks tekislikdagi joylashuvi operator normasi yordamida baholanishi mumkin. Bu xulosa spektral masalalarni o‘rganishda dastlabki sifat tahlilini amalga oshirish uchun muhimdir. Xususan, spektral radiusning operator darajalari normasi bilan bog‘liqligi operatorning iteratsion jarayonlardagi uzoq muddatli xatti-harakatini baholash imkonini beradi

Integral operator misolida olingan natijalar nazariy xulosalarning amaliy tasdig‘i bo‘lib xizmat qildi. Operator spektrining aniq hisoblanishi spektral nazariyaning konkret masalalarda qo‘llanilish imkoniyatlarini namoyon etdi. Bu esa spektral metodlarning differensial tenglamalar, matematik fizika, signal va ma’lumotlarni qayta ishlash hamda zamonaviy hisoblash matematikasidagi ahamiyatini yanada oshiradi. Shunday qilib, tadqiqot natijalari chiziqli operatorlar spektral nazariyasining nafaqat nazariy, balki amaliy

masalalarni yechishda ham muhim metodologik asos ekanligini ko‘rsatdi. Integral operator misolida olib borilgan tahlil nazariy xulosalarning konkret matematik masalalarda qo‘llanilishini ko‘rsatdi. Integral operatorning kompaktligi va uning nolga teng bo‘lmagan spektral nuqtalarining xos qiymatlar bilan bog‘liqligi abstrakt spektral tushunchalarni amaliy masalalar bilan bog‘lash imkonini berdi. Bu holat spektral nazariyaning faqat nazariy funksional analiz doirasida emas, balki integral va differensial tenglamalar, matematik modellashtirish hamda sonli usullarda ham muhim ahamiyatga ega ekanligini tasdiqlaydi.

Tadqiqotning muhim jihati shundan iboratki, spektr, rezolventa, spektral radius, o‘z-o‘ziga qo‘shma va kompakt operatorlarning xususiyatlari alohida tushunchalar sifatida emas, balki yagona spektral tizimning o‘zaro bog‘liq elementlari sifatida qaraldi. Bunday yondashuv chiziqli operatorlarning spektral nazariyasini kompleks tarzda tushunish imkonini beradi. Shu bilan birga, tadqiqotning ayrim chegaralari ham mavjud. Ishda asosan chegaralangan chiziqli operatorlarning spektral xossalari ko‘rib chiqildi. Chegaralanmagan operatorlar, kompakt rezolventali differensial operatorlar, psevdospektr va spektral perturbatsiya masalalari tadqiqot doirasidan tashqarida qoldi. Ushbu yo‘nalishlar kelgusidagi tadqiqotlarda operatorlar spektrining yanada murakkab xususiyatlarini o‘rganish uchun istiqbolli yo‘nalish hisoblanadi. Umuman olganda, olingan natijalar chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi cheksiz o‘lchamli fazolardagi murakkab matematik masalalarni o‘rganishda fundamental vosita ekanligini ko‘rsatadi. Tadqiqot natijalari spektral masalalarni nazariy jihatdan umumlashtirish bilan bir qatorda, kelgusida operatorlarning spektral barqarorligi, perturbatsion xususiyatlari va differensial hamda integral operatorlarning spektrini chuqurroq tadqiq etish uchun metodologik asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin

Xulosa. Chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi Banax va Hilbert fazolaridagi operatorlarning fundamental xususiyatlarini o‘rganish imkonini beruvchi muhim matematik apparat hisoblanadi. Tadqiqot davomida spektr, rezolventa, spektral radius, o‘z-o‘ziga qo‘shma va kompakt operatorlar tushunchalari o‘zaro bog‘liq holda tahlil qilindi. Spektral radiusning operator darajalari normasi orqali ifodalanishi operatorning spektral xususiyatlarini aniqlash uchun samarali vosita ekanligi ko‘rsatildi. Hilbert fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar uchun spektrning haqiqiy sonlardan tashkil topishi, kompakt operatorlar uchun esa nolga teng bo‘lmagan spektral nuqtalarning xos qiymatlardan iborat bo‘lishi aniqlandi. Integral operator misolida nazariy natijalar konkret hisoblashlar orqali tasdiqlandi. Olingan natijalar chiziqli operatorlarning spektral xossalarini o‘rganishda nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega.

Kelgusidagi tadqiqotlarda chegaralanmagan chiziqli operatorlarning spektral xossalarini, kompakt rezolventali operatorlarni, spektral proyeksiyalar va funksional hisoblash usullarini, shuningdek, operatorlar spektrining perturbatsiya va psevdospektr sharoitidagi barqarorligini chuqurroq tadqiq etish maqsadga muvofiqdir. Shu yo‘nalishdagi izlanishlar spektral nazariyaning zamonaviy matematikadagi nazariy va amaliy imkoniyatlarini yanada kengaytirishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1.Colbrook M.J. Computing spectral properties of differential operators // Foundations of Computational Mathematics. – 2023. – Vol. 23. – P. 1–64. DOI: 10.1007/s10208-022-09598-0.

2.Jabłoński Z.J., Jung I.H., Kubrusly C.S., Stochel J. Power convergence of operators on Hilbert spaces // Banach Journal of Mathematical Analysis. – 2024. – Vol. 18. – Article 49. DOI: 10.1007/s43037-024-00371-9.

3.Gil M.I. Eigenvalue perturbation bounds for linear operators in Hilbert spaces // Czechoslovak Mathematical Journal. – 2024. DOI: 10.21136/CMJ.2024.0468-23.

4.Bisterzo G., Siclari G. Quantitative spectral stability for operators with compact resolvent // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. – 2025. – Vol. 64. DOI: 10.1007/s00526-025-03020-7.

5.Discrete spectrum and compactness of the resolvent for non-sectorial Schrödinger operators // Journal of Functional Analysis. – 2024. – Vol. 287. DOI: 10.1016/j.jfa.2024.110512.

6.Shakhmurov V.B. Spectral properties of differential operators in Banach spaces // Applicable Analysis and Discrete Mathematics. – 2023.

7.Shameem M., Deepesh K.P. Spectral theorem for compact self-adjoint operators on smooth Banach spaces. – 2026. arXiv:2608.06873.

8.Kudaybergenov K.K., Arziev A.A., Orinbaev B. Spectral theorem for self-adjoint partial integral operators. – 2025. arXiv:2505.14837.