UO‘K 517.984

FOK FAZOSIDA UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELINING SHUR TO‘LDIRUVCHILARI VA ULARNING MATEMATIK TAHLILI

Shukurullayeva Mohinur Fazliddin qizi,
Buxoro davlat universiteti,
Matematik analiz kafedrasi tayanch doktoranti,
Buxoro, O‘zbekiston
mohinurshukurullayeva2611@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Fok fazosining qirqilgan ikki zarrachali qism fazosida aniqlangan umumlashgan Fridrixs modeli batafsil o‘rganiladi va u 2-tartibli operatorli matritsa ko‘rinishida ifodalanadi. Modelning muhim (uzluksiz) hamda diskret spektrlari to‘liq ravishda tavsiflanadi. Tadqiqot jarayonida modelga mos birinchi va ikkinchi Shur to‘ldiruvchilari konstruktiv ravishda qurilib, ularning operatorlar nazariyasidagi o‘rni va ahamiyati asoslab beriladi. Shuningdek, ushbu Shur to‘ldiruvchilar yordamida operatorli matritsaning spektral xossalari tegishli teoremalar sifatida bayon qilinadi hamda qat’iy isbotlanadi. Olingan natijalar umumlashgan Fridrixs modellari nazariyasini rivojlantirishda hamda Fok fazosida qaralayotgan kvant tizimlarning matematik modellarini yanada chuqurroq tushunishda muhim ahamiyat kasb etadi.*

Kalit so‘zlar: *umumlashgan Fridrixs modeli, Fok fazosi, operatorli matritsa, muhim spektr, diskret spektr, Shur to‘ldiruvchisi, Fredgolm determinanti, xos qiymat, spektral tahlil.*

ДОПОЛНЕНИЯ ШУРА ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Аннотация. *В данной статье подробно исследуется обобщённая модель Фридрихса, заданная в усечённом двухчастичном подпространстве пространства Фока и представленная в виде операторной матрицы второго порядка. Полностью описаны существенный (непрерывный) и дискретный спектры модели. В ходе исследования конструктивно построены первый и второй дополнители Шура, соответствующие данной модели, и обоснованы их роль и значение в теории операторов. Кроме того, с помощью этих дополнителей Шура спектральные свойства операторной матрицы сформулированы в виде соответствующих теорем и строго доказаны. Полученные результаты имеют важное значение для дальнейшего развития теории обобщённых моделей Фридрихса, а также для более глубокого понимания математических моделей квантовых систем, рассматриваемых в пространстве Фока.*

Ключевые слова: *обобщённая модель Фридрихса, пространство Фока, операторная матрица, существенный спектр, дискретный спектр, дополнение Шура, определитель Фредгольма, собственное значение, спектральный анализ.*

SCHUR COMPLEMENTS OF THE GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL IN FOCK SPACE AND THEIR MATHEMATICAL ANALYSIS

Abstract. *This article presents a study of the generalized Friedrichs model defined in the truncated two-particle subspace of Fock space and represented in the form of a second-order operator matrix. The essential and discrete spectra of the model are characterized. The first and second Schur complements corresponding to the model are constructed, and their role in operator theory is substantiated. By using these Schur complements, the spectral properties of the operator matrix are formulated as theorems and rigorously proved. The results are important for the development of generalized Friedrichs models and for understanding mathematical models of quantum systems in Fock space.*

Keywords: *generalized Friedrichs model, Fock space, operator matrix, essential spectrum, discrete spectrum, Schur complement, Fredholm determinant, eigenvalue, spectral analysis.*

Kirish. Zamonaviy funksional analiz va operatorlar nazariyasida Hilbert fazosidagi chiziqli chegaralangan va chegaralanmagan operatorlarning spektral xossalarini o‘rganish masalasi muhim ilmiy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, murakkab tuzilishga ega bo‘lgan blok operatorli matritsalarni, ya’ni elementlari chiziqli operatorlardan iborat matritsalarni tahlil qilishda samarali usullarni ishlab chiqish

dolzarb masalalardan biridir. Shu nuqtayi nazardan, Shur to‘ldiruvchilari (Schur complements) nazariyasi nafaqat algebraik, balki analitik jihatdan ham keng qo‘llaniladigan kuchli vosita sifatida ajralib turadi.

Shur to‘ldiruvchisi tushunchasi dastlab chekli o‘lchamli matritsalar uchun kiritilgan bo‘lsa-da, keyinchalik u cheksiz o‘lchamli fazolardagi operatorlarga ham muvaffaqiyatli umumlashtirildi. Ushbu yondashuv blok operatorli matritsalarni soddalashtirish, ularning spektrini aniqlash, hamda xos qiymatlar va xos funksiyalarni tadqiq qilishda muhim rol o‘ynaydi. Xususan, Shur to‘ldiruvchisi yordamida berilgan operatorni kichikroq o‘lchamli operatorlar orqali ifodalash va shu orqali murakkab masalalarni nisbatan sodda ko‘rinishga keltirish mumkin [1, 2].

Bundan tashqari, Shur to‘ldiruvchilari kvant mexanikasi, matematik fizika, sonli analiz va differensial tenglamalar nazariyasida uchraydigan ko‘plab masalalarni yechishda ham keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, ko‘p zarrachali sistemalar, panjarali modellar va Fridrixs tipidagi operatorlar uchun spektral tahlilni amalga oshirishda ushbu usul samarali natijalar beradi.

Mazkur maqolada Fok fazosining qirqilgan ikki zarrachali qism fazosida ikkinchi tartibli operatorli matritsa ko‘rinishda tasvirlanuvchi umumlashgan Fridrixs modelining muhim spektri topilgan. Uning Fredgolm determinantini qurish orqali diskret spektri tavsiflangan. Mos birinchi va ikkinchi Shur to‘ldiruvchilari qurilgan, ularning ayrim asosiy xossalari tahlil qilingan. Shuningdek, Shur to‘ldiruvchilari yordamida muhim spektrni tavsiflash va xos qiymatlarni aniqlashga doir ayrim natijalar keltirilgan [3].

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. Shur to‘ldiruvchilari haqida. Bizga $\mathcal{H}_1$ va $\mathcal{H}_1$ Hilbert fazolari berilgan bo‘lib,

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

to‘g‘ri yig‘indi berilgan bo‘lsin. U holda $\mathcal{H}$ Hilbert fazosida aniqlangan har qanday $\mathcal{A}$ chiziqli, chegaralangan operator hamisha ikkinchi tartibli operatorli matritsa (1) ko‘rinishida tasvirlanadi:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

bu yerda $A_{ij}: \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i \quad i,j = 1,2$ matritsaviy elementlar chiziqli, chegaralangan operatorlardir. Ma’lumki, $\mathcal{A}$ o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lishi uchun barcha $i,j = 1,2$ uchun $\mathcal{H}_{ij}{}^* = \mathcal{H}_{ji}$ tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Shur to‘ldiruvchilari dastlab matritsalar nazariyasida qo‘llanilgan. (1) ko‘rinishdagi blok matritsa bilan bog‘liq bo‘lgan $A_{22} - A_{21}A_{11}A_{12}$ tipidagi ifodani qarash g‘oyasi kamida Issai Schur [4] ishlariga borib taqaladi, balki undan ham oldin James Joseph Sylvester tadqiqotlarida uchrashi mumkin. “Shur to‘ldiruvchisi” (Schur complement) atamasi esa 1968-yilda Emilie Virginia Haynsworth [5] tomonidan kiritilgan bo‘lib, u bo‘lingan (blokli) matritsalarni o‘rganish jarayonida ushbu tushunchani ilmiy muomalaga olib kirgan. Hilbert fazolarda Shur to‘ldiruvchilari ilk bor Mark Grigorievich Kreinning o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning kengaytmalari haqidagi mashhur [6] ishida “qisqartirilgan operatorlar” (shorted operators) nomi ostida uchraydi. Matritsalar nazariyasi va sonli chiziqli algebra sohalaridagi ko‘plab qo‘llanilishlaridan tashqari, Shur to‘ldiruvchilari statistika, elektrotexnika hamda matematik tizimlar nazariyasi kabi ko‘plab boshqa yo‘nalishlarda ham keng qo‘llaniladi. Xususan, ular chiziqli vaqtga nisbatan invariant tizimlarning holat fazosidagi realizatsiyalarida uzatish funksiyalari sifatida namoyon bo‘ladi. Chegaralangan va chegaralanmagan blok operatorli matritsalar nazariyasida Shur to‘ldiruvchilari spektr hamda turli spektral xossalarni o‘rganishda kuchli vosita hisoblanadi. Bu holat ilk bor Rolf Nagel [7] tomonidan qayd etilgan. U “diagonal soha” va “diagonal bo‘lmagan soha” tushunchalari asosida chegaralanmagan operatorli matritsalar uchun o‘ziga xos “matritsalar nazariyasi”ni rivojlantirishni boshlab bergan.

$\mathcal{A}$ blok operatorli matritsaning spektral xossalari bilan uning Shur to‘ldiruvchilari bo‘lgan

$$S_1(z) = A_{11} - z - A_{12}(A_{22} - z)^{-1}A_{21} \quad z \notin \sigma(A_{22})$$
$$S_2(z) = A_{22} - z - A_{21}(A_{11} - z)^{-1}A_{12} \quad z \notin \sigma(A_{11})$$

operatorlarning spektral xossalari o‘rtasidagi yaqin bog‘liqlik, masalan,

$$\mathcal{A} - z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}(A_{11} - z)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} - z & 0 \\ 0 & S_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(A_{11} - z)^{-1} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad z \notin \sigma(A_{11})$$

uchun qo‘llaniladigan Frobenius–Shur faktorizatsiyalari hamda $R(z)$ rezolventa uchun mos faktorizatsiyalardan yaqqol ko‘rinadi.

[8] maqolada haqiqiy z spektral parametrga bog‘liq bo‘lgan, 3×3 o‘lchamli blok operatorli matritsaga mos keluvchi birinchi Shur to‘ldiruvchisi $S_1(z)$ ko‘rib chiqilgan $S_1(z)$ operatorning muhim spektri lakunalarni o‘z ichiga olishi mumkin bo‘lgan holat tahlil qilingan. $S_1(z)$ operatorining spektral tahlilidagi muhim masalalardan biri - muhim spektrdan tashqarida joylashgan xos qiymatlar sonining chekli yoki cheksiz ekanligini aniqlashdan iborat. Bu maqolada $S_1(z)$ operatorining diskret spektri batafsil o‘rganilgan hamda tadqiq qilinayotgan matritsa operatori bilan $S_1(z)$ operatorining xos qiymatlari o‘rtasidagi bog‘liqlik aniqlangan. Shuningdek, $S_1(z)$ operatorining xos vektor-funksiyalari uchun Faddeyev

tenglamasining simmetriklashtirilgan analogi qurilgan va xos qiymatlar soni bilan bog‘liq ayrim asosiy xossalar isbotlangan. Mualliflar tomonidan $S_1(z)$ operatorining muhim spektridan tashqarida joylashgan ixtiyoriy intervaldagi xos qiymatlar soni va ularning karraliligini aniqlash formulalari keltirilgan. Olingan formulalar lakunada joylashgan diskret spektrning taqsimoti uchun asimptotik baholarni hosil qilish imkonini beradi. Bundan tashqari $S_1(z)$ operatorining diskret spektri chekli bo‘lishi uchun yetarli shartlar topilgan. $S_1(z)$ operatorining xossalaridan kelib chiqib, operatorli matritsa uchun ikkita muhim xulosa chiqarilgan.

[9] maqolada panjaradagi bitta qo‘zg‘almas atom va ko‘pi bilan ikkita fotondan iborat spin-boson modeli ko‘rib chiqilgan. Bu modelga mos keluvchi z spektral parametrga bog‘liq bo‘lgan $S_1(z)$ birinchi Shur to‘ldiruvchisi qurilgan. Spin-bozon modeli uchun $S_1(z)$ operatorga nisbatan Birman–Shvinger prinsipi isbotlangan. Shuningdek, tadqiq qilingan model xos qiymatlari soni bilan bog‘liq bo‘lgan $S_1(z)$ operatorining muhim xossalari torning barcha o‘lchamlari hamda ixtiyoriy bog‘lanish konstantasi uchun tadqiq etilgan.

[10] maqolada fermionli Fok fazosida ta’sir qiluvchi uchinchi tartibli chegaralangan, o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorli matritsa ko‘rib chiqilgan. Avvalo, uning spektral xossalarini o‘rganish maqsadida uchinchi tartibli diskret parametrli operatorli matritsa kiritilgan. So‘ngra, mazkur operatorli matritsaga mos keluvchi birinchi Shur to‘ldiruvchisi qurilgan va undan foydalanib, operatorli matritsaga mos birinchi Shur to‘ldiruvchisi aniqlangan. Uchinchi tartibli matritsaning xos qiymatlari bilan unga mos birinchi Shur to‘ldiruvchining xos qiymatlari o‘rtasidagi bog‘liqlik o‘rnatilgan. Shuningdek, operatorli matritsasining birinchi Shur to‘ldiruvchisining xos qiymatlariga bog‘liq bo‘lgan funksiyaning λ spektral parametrga nisbatan monoton o‘suvchi va uzluksiz ekanligi isbotlangan

Umumlashgan Fridrixs modeli va uning spektri

Dastlab, $\mathbb{T}^d$ orqali d-o‘lchamli torni, $\mathcal{H}_1 := \mathbb{C}$ orqali bir o’lchamli kompleks sonlar fazosini, $\mathcal{H}_2 := L_2(\mathbb{T}^d)$ orqali $\mathbb{T}^d$ torda kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazoni belgilaymiz. Ushbu fazolarning to’g’ri yig’indisini

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

kabi aniqlaymiz.

$\mathcal{H}$ fazoda

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

operatorli matritsani qaraymiz. $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning $A_{\mathrm{ij}}, \mathrm{i,j} = 1,2$ elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$A_{11}f_1 = af_1, \qquad A_{12}f_2 = \int_{\mathbb{T}^d} v(t)\, f_2(t)\, dt,$$

$$(A_{21}f_1)(x) = v(x)f_1\,, \quad (A_{22}f_2)(x) = u(x)f_2(x),$$

bu yerda, a ixtiyoriy haqiqiy son, $f_i \in \mathcal{H}_i, i = 1,2$, $u(\cdot)$ va $v(\cdot)$ funksiyalar $\mathbb{T}^d$ torda aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalardir.

Operatorli matritsaning matritsaviy elementlari aniqlanishiga ko‘ra, $A_{21} = A_{12}^*$ munosabat bajariladi. Demak, $\mathcal{A}$ operatorli matritsa o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorni ifodalaydi.

Endi $\mathcal{A}$ operator matritsaning muhim spektrini aniqlash uchun quyidagi operatorni qaraymiz:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Bu holda $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0$ chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish operatori bo‘ladi. Chekli o’lchamli qo’zg’alishlarda muhim spektrning o’zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra, $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_0) = \sigma(A_{22}).$$

tenglik o’rinli. A_{22} operator aniqlanishiga ko’ra ko‘paytirish operatori bo‘lgani sababli uning spektri $u(x)$ funksiyaning qiymatlar to‘plami bilan aniqlanadi, ya’ni

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}) = [m, M],$$

bu yerda

$$m := \min_{x\in\mathbb{T}^d} u(x), \qquad M = \max_{x\in\mathbb{T}^d} u(x).$$

Endi $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning diskret spektrini tavsiflash maqsadida $\mathbb{C} \setminus [m, M]$ sohada regulyar bo’lgan

$$\Delta(z) = a - z - \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)}{u(t) - z}\, dt$$

funksiyani qaraymiz. Mazkur $\Delta(z)$ funksiya $\mathcal{A}$ operatorli matritsaga mos Fredgolm determinanti deyiladi. $\mathcal{A}$ operatorning diskret spektri shu determinantning nollari orqali tavsiflanadi, ya'ni

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m, M] : \Delta(z) = 0\}.$$

Demak, $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning xos qiymatlarini topish masalasi Fredgolm determinantining nollarini topish masalasiga keltiriladi.

Birinchi va ikkinchi Shur to'ldiruvchilari

Faraz qilaylik, z soni A_{22} operatorning regulyar nuqtalar to'plamiga tegishli bo'lsin, ya'ni $z \in \rho(A_{22})$ bo'lsin. U holda $\mathcal{A}$ operatorli matritsaga mos birinchi Shur to'ldiruvchisi

$$S_1(z) = A_{11} - zI - A_{12}(A_{22} - zI)^{-1}A_{21}$$

formula orqali aniqlanadi. Berilgan model uchun birinchi Shur to'ldiruvchining ta'siri quyidagicha bo'ladi:

$$(S_1(z)f_1)(x) = \left(a - z - \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)}{u(t) - z}\, dt\right) f_1 = \Delta(z) f_1.$$

Faraz qilaylik, $z \in \rho(A_{11})$ bo'lsin. U holda $\mathcal{A}$ operatorli matritsaga mos ikkinchi Shur to'ldiruvchisi

$$S_2(z) = A_{22} - zI - A_{21}(A_{11} - zI)^{-1}A_{12}$$

formula orqali aniqlanadi. Berilgan modelda ikkinchi Shur to'ldiruvchining ta'siri

$$(S_2(z)f_2)(x) = (u(x) - z)f_2(x) - \frac{v(x)}{a - z}\int_{\mathbb{T}^d} v(t)\, f_2(t)\, dt, f_2 \in H_2,$$

ko'rinishda ifodalanadi.

1-teorema. Agar $z \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$ bo'lsa, u holda z soni $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun 0 soni $S_1(z)$ operator uchun xos qiymat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, z soni $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lsin. U holda shunday noldan farqli $f = (f_1, f_2)$, bu yerda $f_1 \in \mathcal{H}_1,\ f_2 \in \mathcal{H}_2$ vektor topilib, $\mathcal{A}f = zf$ tenglik bajariladi. Bu esa quyidagi sistemaga ekvivalent:

$$\begin{cases}(A_{11} - zI)f_1 + A_{12}f_2 = 0,\\ A_{21}f_1 + (A_{22} - zI)f_2 = 0.\end{cases}$$

$z \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$ bo'lgani uchun $A_{22} - zI$ operatori teskari operatorga ega. Shuning uchun sistemaning ikkinchi tenglamasidan

$$f_2 = -(A_{22} - zI)^{-1}A_{21}f_1 \tag{2}$$

Ushbu (2) ifodani birinchi tenglamaga qo'ysak,

$$(A_{11} - zI)f_1 - A_{12}(A_{22} - zI)^{-1}A_{21}f_1 = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan

$$(A_{11} - zI - A_{12}(A_{22} - zI)^{-1}A_{21})f_1 = 0$$

ifoda kelib chiqadi. Demak,

$$S_1(z)f_1 = 0.$$

Ushbu tenglikda $f_1 = 0$ bo'lishi mumkin emas. Aks holda yuqoridagi formuladan $f_2 = 0$ kelib chiqadi. Bu esa $f \neq 0$ ga zid. Demak, $f_1 \neq 0$, ya'ni 0 soni $S_1(z)$ operatorning xos qiymati bo'ladi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, 0 soni $S_1(z)$ operatorning xos qiymati bo'lsin. U holda shunday $f_1 \neq 0$ mavjudki, $S_1(z)f_1 = 0$. Endi

$$f_2 := -(A_{22} - zI)^{-1}A_{21}f_1$$

deb olamiz. U holda

$$A_{21}f_1 + (A_{22} - zI)f_2 = 0$$

tenglik bajariladi. Bundan tashqari,

$$(A_{11} - zI)f_1 + A_{12}f_2 = (A_{11} - zI)f_1 - A_{12}(A_{22} - zI)^{-1}A_{21}f_1 = S_1(z)f_1 = 0.$$

Shunday qilib,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}.$$

Demak, z soni operatorli matritsa $\mathcal{A}$ ning xos qiymati bo'ladi.

2-teorema. Agar $z \in \mathbb{R} \setminus ([m, M] \cup \{a\})$ bo'lsa, u holda z soni $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning xos qiymat bo'lishi uchun 0 soni $S_2(z)$ operatorning xos qiymati bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, z soni $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning xos qiymati bo'lsin. U holda shunday noldan farqli $f = (f_1, f_2),\ f_1 \in \mathcal{H}_1,\ f_2 \in \mathcal{H}_2$ vektor mavjud bo'lib, $\mathcal{A}f = zf$ tenglik bajariladi. Bu esa quyidagi sistemaga ekvivalent:

$$\begin{cases}(A_{11}-zI)f_1+A_{12}f_2=0,\\ A_{21}f_1+(A_{22}-zI)f_2=0.\end{cases}$$

$z\in\mathbb{R}\setminus([m,M]\cup\{a\})$ bo‘lgani uchun $A_{11}-zI$ operatori teskari operatorga ega. Shuning uchun sistemaning birinchi tenglamasidan

$$f_1=-(A_{11}-zI)^{-1}A_{12}f_2 \qquad (3)$$

hosil bo‘ladi. (3) ifodani ikkinchi tenglamaga qo‘ysak,

$$-A_{21}(A_{11}-zI)^{-1}A_{12}f_2+(A_{22}-zI)f_2=0$$

ifodaga ega bo‘lamiz. Bundan

$$(A_{22}-zI-A_{21}(A_{11}-zI)^{-1}A_{12})f_2=0$$

munosabat kelib chiqadi. Demak,

$$S_2(z)f_2=0.$$

Ushbu tenglamadan $f_2=0$ bo‘lishi mumkin emas. Aks holda yuqoridagi formuladan $f_1=0$ kelib chiqadi. Bu esa $f\neq 0$ shartga zid. Demak, $f_2\neq 0$, ya’ni 0 soni $S_2(z)$ operatorning xos qiymati bo‘ladi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, 0 soni $S_2(z)$ operatorning xos qiymati bo‘lsin. U holda shunday $f_2\neq 0$ mavjudki, $S_2(z)f_2=0$. Endi

$$f_1:=-(A_{11}-zI)^{-1}A_{12}f_2$$

deb olamiz. U holda

$$(A_{11}-zI)f_1+A_{12}f_2=0$$

tenglik bajariladi. Bundan tashqari,

$$A_{21}f_1+(A_{22}-zI)f_2=-A_{21}(A_{11}-zI)^{-1}A_{12}f_2+(A_{22}-zI)f_2=S_2(z)f_2=0.$$

Shunday qilib,

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$$

tenglik hosil bo‘ladi. Demak, z soni operatorli matritsa $\mathcal{A}$ ning xos qiymati bo‘ladi.

Xulosa. Ushbu maqolada Fok fazosining qirqilgan ikki zarrachali qism fazosida aniqlangan umumlashgan Fridrixs modeli kompleks va tizimli yondashuv asosida batafsil tadqiq etildi hamda u 2-tartibli operatorli matritsa ko‘rinishida aniq ifodalandi. Tadqiqot davomida model operatorlarning muhim (uzluksiz) spektri hamda Fredgolm determinantini topish orqali diskret spektri to‘liq va izchil ravishda tavsiflandi, spektrlarning tuzilishi va o‘zaro bog‘liqligi aniqlashtirildi.

Shuningdek, modelga mos birinchi va ikkinchi Shur to‘ldiruvchilari konstruktiv usulda qurilib, ularning operatorlar nazariyasidagi o‘rni, xossalari hamda spektral tahlildagi roli asoslab berildi. Olingan natijalar umumlashgan Fridrixs modellari doirasida yangi ilmiy yondashuvlarni shakllantirishga xizmat qiladi hamda Fok fazosida qaralayotgan kvant tizimlarning matematik modellarini yanada mukammal tushunish imkonini beradi. Shu bilan birga, mazkur tadqiqot natijalari operatorlar nazariyasi, spektral tahlil va matematik fizikaning tegishli yo‘nalishlarida keyingi ilmiy izlanishlar uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Tretter C. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London: Imperial College Press, 2008. 296 p.

2. Jeribi A. Spectral Theory and Applications of Linear Operators and Block Operator Matrices. Cham: Springer, 2015. 599 p.

3. Ibrogimov O. O., Tretter C. On the spectrum of an operator in truncated Fock space // Indefinite Inner Product Spaces, Schur Analysis, and Differential Equations / eds. D. Alpay, B. Kirstein. Cham: Birkhäuser, 2018. Vol. 263. P. 321–334.

4. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1917. Vol. 147. P. 205–232.

5. Haynsworth E. V. Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix // Linear Algebra and its Applications. 1968. Vol. 1, No. 1. P. 73–81.

6. Krein M. G. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications. I // Recueil Mathématique (Matematicheskii Sbornik), New Series. 1947. Vol. 20 (62), No. 3. P. 431–495.

7. Nagel R. Characteristic equations for the spectrum of generators // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. 1997. Ser. 4, Vol. 24, No. 4. P. 703–717.

8. Muminov M. E., Rasulov T. Kh. An eigenvalue multiplicity formula for the Schur complement of a 3 × 3 block operator matrix // Siberian Mathematical Journal. 2015. Vol. 56, No. 4. P. 699–713.

9. Rasulov T. H., Dilmurodov E. B. The first Schur complement for a lattice spin-boson model with at most two photons // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2023. Vol. 14, No. 3. P. 304–311.

10. Rasulov T., Ismoilova D. On the negative eigenvalues of the first Schur complement corresponding to the third-order operator matrix in the fermionic Fock space // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2025. Vol. 8, No. 5. P. 90–97.