UO‘K 372.851:512

PARAMETRLI MASALALARNI YECHISHDA ALGEBRAIK VA MANTIQIY TAHLILNING METODIK BOSQICHLARI

Ro‘zikov Maxammadjon Mamirali o‘g‘li,
Farg‘ona davlat universiteti o‘qituvchisi
ro‘zikov@mail.ru

Annotatsiya. *Ushbu maqolada parametrli masalalarni yechishda algebraik va mantiqiy tahlilning metodik bosqichlari yoritilgan. Tadqiqotda parametrning o‘rinli qiymatlar sohasi, aniqlanish sohasi, xususiy masala va umumiy yechim tushunchalarining nazariy-metodik mazmuni aniqlashtirildi. Maqolada parametrli masalalarni faqat algebraik hisoblashlar majmuyi sifatida emas, balki o‘quvchilarning tahliliy fikrlashi, tasniflash va umumlashtirish ko‘nikmalarini rivojlantiruvchi yaxlit metodik jarayon sifatida qarash taklif etiladi.*

Kalit so‘zlar: *parametrli masala, o‘rinli qiymatlar sohasi, algebraik tahlil, mantiqiy tahlil, umumiy yechim.*

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЭТАПЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО И ЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация. *В статье рассматриваются методические этапы алгебраического и логического анализа при решении задач с параметрами. В исследовании уточнено теоретико-методическое содержание понятий области допустимых значений параметра, области определения, частной задачи и общего решения. Предлагается рассматривать задачи с параметрами не только как совокупность алгебраических вычислений, но и как целостный методический процесс, направленный на развитие у учащихся аналитического мышления, умений классифицировать и обобщать.*

Ключевые слова: *задача с параметрами, область допустимых значений параметра, алгебраический анализ, логический анализ, общее решение.*

METHODOLOGICAL STAGES OF ALGEBRAIC AND LOGICAL ANALYSIS IN SOLVING PROBLEMS WITH PARAMETERS

Abstract. *This article examines the methodological stages of algebraic and logical analysis in solving problems with parameters. The study clarifies the theoretical and methodological content of the concepts of the admissible domain of parameter values, domain of definition, particular problem, and general solution. It is proposed that problems with parameters be considered not merely as a set of algebraic computations, but as an integrated methodological process aimed at developing students’ analytical thinking, classification, and generalization skills.*

Keywords: *problems with parameters, admissible domain of parameter values, algebraic analysis, logical analysis, general solution.*

Kirish. Matematika ta’limida o‘quvchilarning masalani tahlil qilish, xususiy holatlarni tasniflash va natijalarni umumlashtirish ko‘nikmalarini rivojlantirish muhim metodik vazifalardan biridir [1, 2]. Parametrli masalalar mazkur ko‘nikmalarni shakllantirishda keng didaktik imkoniyatlarga ega. Ularni yechish jarayonida parametrning turli qiymatlariga mos holatlar tahlil qilinadi va umumiy yechim aniqlanadi. Shu sababli dastlab parametrning o‘rinli qiymatlari sohasi belgilanadi. Bu esa masala aniqlanmagan holatlarni yechim mavjud bo‘lmagan holatlardan farqlash imkonini beradi. Parametrli masalalarni yechishda algebraik almashtirishlar bilan bir qatorda mantiqiy tahlil, chegaraviy holatlarni tekshirish va natijalarni umumlashtirish ham muhim ahamiyat kasb etadi. O‘quv-metodik adabiyotlarda [3, 6] ko‘proq tayyor algoritmlar va namunaviy yechimlar keltiriladi. Biroq parametr sohasini aniqlash, uni muhim holatlarga ajratish va xususiy holatlarni izchil tekshirish bosqichlari yetarlicha tizimlashtirilmagan. Shu bois algebraik va mantiqiy tahlilni o‘zaro bog‘langan yaxlit metodik jarayon sifatida tashkil etish zarur [7, 8].

Tadqiqotning maqsadi parametrli masalalarni yechishda algebraik va mantiqiy tahlil bosqichlarini aniqlash hamda ularni parametrli tenglama va tengsizliklarni o‘qitishda qo‘llash imkoniyatlarini asoslashdan iborat. Bunda parametrning o‘rinli qiymatlari sohasi aniqlanadi, parametr sohasi zarur qismlarga ajratiladi, xususiy holatlar tekshiriladi va olingan yechimlar umumlashtiriladi.

Tadqiqot metodologiyasi va adabiyotlarning tahlili. Tadqiqot nazariy-metodik tahlil asosida olib borildi. Unda parametrli masala, parametrning o‘rinli qiymati, aniqlanish sohasi va umumiy yechim tushunchalari aniqlashtirildi. Yechish jarayoni parametrning o‘rinli qiymatlarini aniqlash, sohani qismlarga ajratish, xususiy holatlarni yechish, natijalarni tizimlashtirish va tekshirish bosqichlariga ajratildi. Bu yondashuv parametrli masalalarni tahlil, tasnif va umumlashtirishga asoslangan yaxlit metodik jarayon sifatida qaraydi [7]. Parametrli masalalarda, avvalo, masala sharti ma’noga ega bo‘ladigan parametr qiymatlari aniqlanadi. Shu asosda parametrning o‘rinli qiymati tushunchasi kiritiladi.

Ta’rif. Parametrning shunday qiymatiga o*‘rinli qiymat* deyiladiki, bu qiymatda berilgan masalaning aniqlanish sohasi bo‘sh bo‘lmagan to‘plamdan iborat bo‘ladi.

Boshqacha aytganda, agar masala shartida ishtirok etuvchi boshqa o‘zgaruvchilarning kamida bitta qiymati mavjud bo‘lib, ushbu qiymat parametrning berilgan qiymati bilan birgalikda masala shartini ifodalovchi analitik ifodaga qo‘yilganda bu ifoda matematik ma’noga ega bo‘lsa, parametrning qiymati o‘rinli deb hisoblanadi.

Ta’rif. Parametrning barcha o‘rinli qiymatlari hosil qilgan to‘plam parametrning o‘rinli qiymatlar sohasi deyiladi va u D_p bilan belgilanadi.

Agar parametrning biror qiymati D_p to‘plamga kirmasa, bu holat mazkur parametr qiymatida masalaning yechimi yo‘qligini emas, balki masalaning o‘zi matematik ma’noga ega emasligini bildiradi. Chunki ifoda aniqlanmagan holatda uning yechimi mavjudligi yoki mavjud emasligi haqida fikr yuritish mantiqan to‘g‘ri bo‘lmaydi. Bu yerda shuni alohida ta’kidlash lozimki, parametrning o‘rinli qiymati masalaning, albatta, yechimga ega ekanligini anglatmaydi. U faqat berilgan parametr qiymatida masala sharti aniqlanganligini, ya’ni masalani mazmunan qarash mumkinligini bildiradi, xolos. Quyida ushbu tushunchani aniqlashtiruvchi bir nechta misollar keltiriladi. Barcha misollarda o‘zgaruvchilar haqiqiy qiymatlar qabul qiladi, deb qaraladi va izlanayotgan o‘zgaruvchi sifatida x tanlanadi.

1-misol. Quyidagi tenglamani qaraymiz: $(a^2+1)x-a=0.$ Bu tenglama x o‘zgaruvchiga nisbatan qaralganda, a parametrning istalgan haqiqiy qiymatida ifoda ma’noga ega bo‘ladi. Chunki a^2+1 ifoda har qanday $a\in\mathbb{R}$ uchun aniqlangan. Demak, $D_p=R.$

2-misol. Quyidagi tengsizlik berilgan bo‘lsin: $\dfrac{x+2}{a-3}\geq 0.$ Bu tengsizlikda maxraj $a-3$ ga teng. Agar $a=3$ bo‘lsa, ifoda aniqlanmaydi. Agar $a\neq 3$ bo‘lsa, kamida bitta x qiymatida emas, balki barcha haqiqiy x qiymatlarida ifoda ma’noga ega bo‘ladi. Shuning uchun parametrning o‘rinli qiymatlar sohasi quyidagicha:

$$D_p=R\setminus\{3\}.$$

3-misol. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$\sqrt{x+1}+\ln(x+2)+a=0.$$

Bu yerda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo‘lmasligi va logarifm ostidagi ifoda musbat bo‘lishi kerak: $x+1\geq 0,\ x+2>0.$ Bundan $x\geq -1,\ x>-2$ shartlar kelib chiqadi. Ularning umumiy yechimi $x\geq -1$ bo‘lib, bu to‘plam bo‘sh emas. Parametr a esa ifodaning aniqlanishiga hech qanday cheklov qo‘ymaydi. Demak, parametrning barcha haqiqiy qiymatlari o‘rinli: $D_p=R.$

4-misol. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}+a=0.$$

Bu tenglama ma’noga ega bo‘lishi uchun bir vaqtning o‘zida quyidagi shartlar bajarilishi kerak: $x-2\geq 0,\ 1-x\geq 0.$ Ya’ni $x\geq 2,\ x\leq 1.$ Bu ikki shart bir vaqtda bajarilmaydi. Shuning uchun x ning bunday qiymati mavjud emas. Demak, parametrning hech bir qiymatida masala sharti aniqlanmaydi. Shunday qilib, $D_p=\varnothing.$

Endi parametrning o‘rinli qiymatlar sohasi tushunchasiga tayangan holda parametr qatnashgan tenglama yoki tengsizlikning aniqlanish sohasi tushunchasini kiritamiz.

Aytaylik,

$$F(x,a)\vee 0$$

berilgan masalaning formal yozuvi bo‘lsin. Bu yerda $\vee$ belgisi tenglik yoki tengsizlik munosabatlaridan birini bildiradi, ya’ni $\vee\in\{=,<,\leq,>,\geq\}.$ Shuningdek, $F(x,a)\vee 0$ yozuvi tenglama, tengsizlik, ularning sistemasi yoki majmuasi ko‘rinishidagi masalalarni umumiy tarzda ifodalashi mumkin.

Agar $\alpha \in D_p$ bo‘lsa, u holda $a = \alpha$ deb olib, quyidagi xususiy masalani qaraymiz: $F(x,\alpha) \vee 0$. Bu xususiy masalada ifoda aniqlangan bo‘ladigan barcha x qiymatlar to‘plamini X_α bilan belgilaymiz.

Ta’rif. Parametr a qatnashgan $F(x,a) \vee 0$ masalaning x o‘zgaruvchiga nisbatan aniqlanish sohasi deb quyidagi to‘plamga aytiladi:

$$D_F(x,a) = \left\{(x,a) \in \mathbb{R}^2 \mid\ a \in D_p,\ x \in X_a\right\}.$$

Bu to‘plam parametr va o‘zgaruvchi qiymatlarining shunday juftliklaridan iboratki, ularda berilgan masala sharti matematik ma’noga ega bo‘ladi.

5-misol. Quyidagi tengsizlikni qaraymiz:

$$\frac{x-a+1}{x+a-2} < 0.$$

Bu tengsizlikda maxraj $x+a-2$ nolga teng bo‘lmasligi kerak. Har qanday $a \in R$ uchun x ning $x \neq 2-a$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlari mavjud. Demak, parametrning barcha haqiqiy qiymatlari o‘rinli: $D_p = R$. Biroq har bir tayinlangan a uchun $x = 2-a$ qiymatida ifoda aniqlanmaydi. Shuning uchun tengsizlikning aniqlanish sohasi quyidagicha bo‘ladi:

$$D_F(x,a) = R^2 \setminus \left\{(x,a) \in R^2 \mid\ x+a-2=0\right\}.$$

Demak, bu tengsizlikning aniqlanish sohasi (x,a) tekislikdan $x+a-2=0$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtalar chiqarib tashlangan to‘plamdan iborat.

6-misol. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$\frac{x-1}{a(a+1)} + \frac{a+1}{x-a} = 3.$$

Bu tenglamada maxrajlar nolga teng bo‘lmasligi kerak. Shuning uchun quyidagi shartlar bajarilishi zarur: $a(a+1) \neq 0,\ x-a \neq 0.$ Birinchi shartdan $a \neq 0,\ a \neq -1$ kelib chiqadi. Agar $a = 0$ yoki $a = -1$ bo‘lsa, birinchi kasr aniqlanmaydi va masala sharti har qanday x uchun ma’noga ega bo‘lmaydi. Demak, parametrning o‘rinli qiymatlar sohasi:

$$D_p = R \setminus \{-1, 0\}.$$

Endi aniqlanish sohasini yozamiz. Har bir $a \in D_p$ uchun ikkinchi maxrajning nolga teng bo‘lmasligi talab qilinadi: $x \neq a.$ Shuning uchun tenglamaning aniqlanish sohasi

$$D_F(x,a) = \left\{(x,a) \in R^2 \mid\ a \neq -1, a \neq 0, x \neq a\right\}$$

ko‘rinishda ifodalanadi. Boshqacha yozganda,

$$D_F(x,a) = R^2 \setminus \left(\left\{(x,a) \in R^2 \mid\ a=-1\right\} \cup \left\{(x,a) \in R^2 \mid\ a=0\right\} \cup \left\{(x,a) \in R^2 \mid\ x-a=0\right\}\right).$$

Demak, bu holda (x,a) tekislikdan $a=-1,\ a=0,\ x-a=0$ tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar chiqarib tashlanadi. Umuman olganda, parametr qatnashgan masalalarda avval parametrning o‘rinli qiymatlar sohasi aniqlanadi. So‘ngra har bir o‘rinli parametr qiymati uchun o‘zgaruvchining aniqlanish sohasi tekshiriladi. Bu bosqich parametrli tenglama va tengsizliklarni to‘g‘ri tahlil qilishning zaruriy sharti hisoblanadi.

Umuman olganda, parametrli masala - tarkibida qiymati oldindan aniq berilmagan, ammo ma’lum deb qaraladigan parametr qatnashgan tenglama, tengsizlik, sistema yoki boshqa analitik munosabatdir. Uning yechimi noma’lum o‘zgaruvchi bilan birga parametr qiymatiga ham bog‘liq bo‘ladi. O‘quv-metodik manbalarda parametrli masalalarni yechish turlicha talqin qilinadi. Ayrim yondashuvlarda parametrning har bir qiymati uchun yechimlar to‘plamini topish nazarda tutiladi, biroq parametrning o‘rinli qiymatlari sohasi alohida ajratilmaydi [3, 5]. Natijada aniqlanmagan holatlar yechimsiz holatlar bilan aralashishi mumkin. Boshqa yondashuvlarda esa avval parametrning o‘rinli qiymatlari aniqlanib, so‘ng ular qismlarga ajratiladi. Biroq yechimni har doim parametrga bog‘liq bitta funksiya sifatida ifodalash to‘g‘ri emas. Chunki yechim oraliq, chekli yoki cheksiz to‘plam, yoxud bir nechta shartlar orqali berilishi mumkin.

Masalan, $|x+1|+|x-2|=a$ tenglamani qaraylik. Agar $a=3$ bo‘lsa, tenglamaning yechimlari $-1 \le x \le 2$ oraliqdagi barcha haqiqiy sonlardan iborat bo‘ladi. Demak, bu holatda yechim $x = x(a)$ ko‘rinishidagi yagona funksiya sifatida emas, balki butun bir oraliq sifatida ifodalanadi. Shuning uchun parametrli masala yechimini faqat funksional bog‘lanish sifatida talqin qilish yetarli emas. Parametrli

masalalarni o‘rganishda G. Polya, A. Schoenfeld, A.G. Mordkovich, V.A. Gusev va J. Kaputning metodik qarashlari muhimdir. Polya masala yechishni tushunish, rejalashtirish, bajarish va tahlil qilish bosqichlariga ajratadi. Schoenfeld evristik strategiya va metakognitiv nazoratni ta’kidlaydi. Mordkovich va Gusev matematik belgining jarayon va obyekt sifatidagi mazmunini, Kaput esa turli reprezentatsiyalardan foydalanishni asoslaydi [8]. Demak, parametrli masalani yechish o‘rinli qiymatlar sohasini aniqlash, parametr sohasini qismlarga ajratish, xususiy holatlarni tekshirish hamda yechimsiz va aniqlanmagan holatlarni farqlashni talab qiladi.

Ta’rif. Aytaylik, $f(x,a)=0$ tenglik berilgan bo‘lsin. Agar a ning har bir haqiqiy qiymati uchun ushbu tenglamani x ga nisbatan yechish masalasi qo‘yilsa, u holda $f(x,a)=0$ tenglama x o‘zgaruvchili va a parametrli tenglama deyiladi. Parametrli tenglamani yechish deganda a ning har bir qiymati uchun ushbu tenglamani qanoatlantiruvchi x qiymatlarini topish tushuniladi [1].

Bu ta’rifning avvalgi ta’riflardan muhim farqi shundaki, $f(x,a)=0$ tenglama ikkita teng huquqli o‘zgaruvchili tenglama sifatida qaraladi. Bundan tashqari, boshlang‘ich tenglamaning yechimini parametrning har bir qiymati uchun topish masalasi qo‘yiladi. Biroq parametrning har bir haqiqiy qiymati uchun yechimni ko‘rsatish talabi yana bir muammoga olib keladi: parametrning tenglama yechimga ega bo‘lmaydigan qiymatlari to‘plamiga, masalaga umuman aniqlanmagan qiymatlar ham qo‘shilib ketadi.

Ta’rif. Parametrli masalani yechish deganda parametrning o‘rinli qiymatlari to‘plami D_p ni aniqlash, ushbu to‘plamni masalaning xususiyatlariga ko‘ra zarur qismlarga ajratish va har bir parametr qiymatida hosil bo‘ladigan xususiy masalaning yechimlar to‘plamini topish tushuniladi.

Parametrli masalalarni shartiga ko‘ra ikki asosiy sinfga ajratish mumkin.

-Birinchi sinfga parametrning barcha o‘rinli qiymatlari uchun yechimlar to‘plamini topish talab qilinadigan masalalar kiradi.

-Ikkinchi sinfga esa parametrning shunday qiymatlarini aniqlash talab qilinadigan masalalar kiradiki, bu qiymatlarda xususiy masala yechimlari oldindan belgilangan ma’lum xossalarga ega bo‘ladi. Masalan, tengsizlikning barcha haqiqiy x lar uchun bajarilishi, tenglamaning yagona yechimga ega bo‘lishi yoki sistema yechimlarining mavjud bo‘lishi kabi shartlar ikkinchi sinf masalalariga xosdir.

7-misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ (x-y)^2=b. \end{cases}$$

Shuningdek, uning $a=\sqrt{5},\ b=2$ bo‘lgandagi yechimini toping.

Yechish. Sistemadagi ikkinchi tenglama haqiqiy yechimga ega bo‘lishi uchun $b\ge 0$ bo‘lishi zarur. Shu sababli parametrlarning dastlabki o‘rinli qiymatlari sohasi

$$D_p=\{(a,b)\in R^2 |\ b\ge 0\}$$

ko‘rinishda yoziladi. Quyidagi almashtirishlarni kiritamiz:

$$u=x-y,\ v=x+y.$$

U holda $x=\dfrac{u+v}{2},\ y=\dfrac{v-u}{2}$ va $x^2+y^2=\dfrac{u^2+v^2}{2}$ bo‘ladi. Sistema quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases} \dfrac{u^2+v^2}{2}=a^2, \\ u^2=b. \end{cases}$$

Bundan $u=\pm\sqrt{b}$ va $v^2=2a^2-b$ kelib chiqadi. Demak, haqiqiy yechim mavjud bo‘lishi uchun $2a^2-b\ge 0$ ya’ni, $0\le b\le 2a^2$ sharti bajarilishi kerak. Agar $b>2a^2$ bo‘lsa, sistema haqiqiy yechimga ega emas. Agar $0\le b\le 2a^2$ bo‘lsa, sistemaning yechimlari quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{2a^2-b}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2a^2-b}-\sqrt{b}}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{2a^2-b}}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt{b}-\sqrt{2a^2-b}}{2} \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{2a^2-b}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2a^2-b}-\sqrt{b}}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{2a^2-b}}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt{b}-\sqrt{2a^2-b}}{2}. \end{cases}$$

Xususan, $a=\sqrt{5},\ b=2$ bo‘lganda $2a^2-b=10-2=8.$ Demak,

$$\sqrt{b}=\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2a^2-b}=2\sqrt{2}.$$

Shuning uchun xususiy sistemaning yechimlari:

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

8-misol. Quyidagi parametrli tengsizlikni yeching:

$$\frac{x+2}{t+1}-3<0$$

va uning $t=0$ bo‘lgandagi yechimini ko‘rsating.

Yechish. Tengsizlik ma’noga ega bo‘lishi uchun maxraj nolga teng bo‘lmasligi kerak:

$t+1\neq 0.$ Demak, $D_p=\{t\in R|\ t\neq -1\}.$ Tengsizlikni quyidagicha yozamiz: $\dfrac{x+2}{t+1}<3.$ Agar

$$t+1>0,$$

ya’ni $t>-1$ bo‘lsa, tengsizlik belgisini o‘zgartirmasdan ko‘paytiramiz: $x+2<3(t+1).$ Bundan $x<3t+1$ kelib chiqadi. Demak, $t>-1$ bo‘lganda yechimlar to‘plami $x\in(-\infty,3t+1)$ bo‘ladi.

Agar $t+1<0,$ ya’ni $t<-1$ bo‘lsa, manfiy songa ko‘paytirishda tengsizlik belgisi teskari tomonga o‘zgaradi: $x+2>3(t+1).$ Bundan $x>3t+1$ kelib chiqadi. Demak, $t<-1$ bo‘lganda yechimlar to‘plami $x\in(3t+1,+\infty)$ bo‘ladi. Xususan, $t=0$ bo‘lganda tengsizlik $x+2-3<0$ ya’ni $x-1<0$ ko‘rinishga keladi. Shuning uchun $x\in(-\infty,1).$

9-misol. Parametrning shunday barcha qiymatlarini topingki, har birida

$$(a+2)x^2-2(a-1)x+3>0$$

tengsizlik barcha $x\in R$ uchun bajarilsin.

Yechish. Berilgan ifoda kvadrat uchhad bo‘lib, u barcha haqiqiy x lar uchun musbat bo‘lishi uchun parabola yuqoriga qaragan va diskriminant manfiy bo‘lishi kerak. Shuning uchun quyidagi shartlar bajariladi: $a+2>0,\ \Delta<0.$ Bu yerda $\Delta=\left[-2(a-1)\right]^2-4(a+2)\cdot 3.$ Soddalashtiramiz: $\Delta=4(a-1)^2-12(a+2).$ Demak, $4(a-1)^2-12(a+2)<0.$ Har ikki tomonni 4 ga bo‘lamiz: $(a-1)^2-3(a+2)<0.$ Yoyib yozamiz:

$$a^2-2a+1-3a-6<0,\ \ a^2-5a-5<0.$$

Kvadrat tenglamaning ildizlari: $a=\dfrac{5\pm\sqrt{25+20}}{2}=\dfrac{5\pm 3\sqrt{5}}{2}.$ Shuning uchun $a^2-5a-5<0$ tengsizlik quyidagi oraliqda bajariladi: $\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}.$ Birinchi shart esa $a+2>0$, ya’ni $a>-2$ ko‘rinishda bo‘ladi. Chunki $\dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}>-2,$ bu shart yuqoridagi oraliqda avtomatik bajariladi. Demak, izlanayotgan parametr qiymatlari to‘plami:

$$a\in\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2},\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right).$$

Keltirilgan misollar shuni ko‘rsatadiki, parametrli masalalarda yechish jarayoni oddiy tenglama yoki tengsizliklarni yechishdan ko‘ra murakkabroq tuzilishga ega. Chunki parametr o‘zgarganda nafaqat

koeffitsiyentlar, balki yechimlar soni, yechimlar turi, aniqlanish sohasi va qo‘llaniladigan yechish usuli ham o‘zgarishi mumkin. Shu sababli parametrli masalalarni yechishda quyidagi metodik ketma-ketlikka amal qilish maqsadga muvofiq:

1) Parametrning o‘rinli qiymatlari sohasini aniqlash;
2) Parametr sohasini muhim holatlarga ko‘ra qismlarga ajratish;
3) Har bir qismda xususiy masalani yechish;
4) Yechimlarni parameter qiymatlari bo‘yicha tizimlashtrish;
5) Olingan javobni tekshirish va chegaraviy holatlarni alohida tahlil qilish;

Bunday yondashuv parametrli masalalarni formal algoritm sifatida emas, balki tahliliy fikrlash, umumlashtirish, tasniflash va matematik modellashtirishni rivojlantiruvchi vosita sifatida o‘rganishga imkon beradi. Ayniqsa, parametrli masalalarda algebraik, grafik va mantiqiy yondashuvlarni birgalikda qo‘llash o‘quvchilarning matematik tafakkurini chuqurlashtiradi.

Ma’lumki, parametrli tenglamalar va tengsizliklar odatdagi tenglama hamda tengsizliklarga nisbatan umumiyroq matematik obyekt hisoblanadi. Chunki bunday masalalarda parametrning har bir o‘rinli qiymati uchun alohida xususiy tenglama yoki tengsizlik hosil bo‘ladi. Demak, parametrli masalani yechish aslida shu xususiy holatlarning barchasini tizimli tahlil qilishni anglatadi. Parametrli tenglama yoki tengsizlik, bir tomondan, bir nechta o‘zgaruvchili munosabat sifatida qaralsa, ikkinchi tomondan, parametr qiymatlariga bog‘liq cheksiz ko‘p xususiy masalalar majmuasidir. Shu sababli ularni yechishda avvalo parametrning o‘rinli qiymatlari sohasi aniqlanadi, so‘ngra ushbu soha masalaning xususiyatiga ko‘ra qismlarga ajratiladi. Parametrli masalalarning asosiy qismini bitta noma’lum va bitta parametr qatnashgan tenglama, tengsizlik yoki sistemalar tashkil etadi. Eng sodda holda bunday tenglama $f(x,a)=0$ ko‘rinishida yoziladi. Agar parametrning har bir $a \in D_p$ o‘rinli qiymati uchun hosil bo‘ladigan tenglamani x ga nisbatan yechish talab qilinsa, u holda $f(x,a)=0$ tenglama x o‘zgaruvchili va a parametrli tenglama deyiladi. Uni yechish esa parametrning har bir o‘rinli qiymati uchun tenglamani qanoatlantiruvchi barcha x qiymatlarni topishdan iborat. Parametrga aniq $a=\alpha$ qiymat berilganda parametrli tenglamadan xususiy tenglama hosil bo‘ladi: $f(x,\alpha)=0.$ Shunday qilib, parametrli tenglama umumiylikni, xususiy tenglama esa shu umumiylikning konkret ko‘rinishini ifodalaydi. Demak, xususiy tenglamani yechish parametrli tenglamani yechish jarayonining alohida holati sifatida qaraladi. Parametrli tenglamalarda yechim tushunchasi ham odatdagi tenglamalardagiga qaraganda kengroq ma’noga ega. Xususiy tenglamaning yechimi sonlar o‘qidagi nuqta yoki nuqtalar to‘plami bilan ifodalansa, parametrli tenglamaning umumiy yechimi tekislikdagi chiziq yoki soha ko‘rinishida talqin qilinadi. Parametrlar soni ortishi bilan yechimlar fazoviy obyektlar orqali ham ifodalanishi mumkin. Parametrli tenglama tushunchasi funksiya tushunchasi bilan uzviy bog‘liqdir. Chunki $f(x,a)=0$ tenglama x va a o‘rtasidagi ma’lum funksional bog‘lanishni ifodalaydi. Shu bois parametrli tenglamalarni yechishda funksiyaning aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi, monotonligi, ildizlar soni va boshqa xossalari muhim ahamiyatga ega bo‘ladi.

Ta’rif. Agar har bir $a=\alpha,\ \alpha \in D_p$ uchun $x=x(\alpha)$ qiymat mos xususiy tenglama $f(x,\alpha)=0$ ning yechimi bo‘lsa, a parametrli va x o‘zgaruvchili $f(x,a)=0$ tenglama uchun $x=x(a)$ moslik parametrning o‘rinli qiymatlari sohasida umumiy yechim deyiladi.

Umumiy yechim tushunchasi parametrli tenglamalar nazariyasida muhim nazariy tushuncha hisoblanadi. U xususiy tenglamalarning alohida-alohida yechimlarini umumlashtiradi, ularni parametr qiymatlariga ko‘ra tasniflash imkonini beradi hamda parametrli tenglamaning yaxlit tuzilishini ochib beradi. Shu nuqtayi nazardan, parametrli tenglamani yechish faqat algebraik amallarni bajarish emas, balki parametrning o‘zgarishi natijasida hosil bo‘ladigan barcha xususiy holatlarni tahlil qilish, ularni umumlashtirish va yagona tizimga keltirish jarayonidir. Bunda umumiy yechim parametrli tenglamaning ichki tuzilishini ifodalovchi asosiy vosita sifatida namoyon bo‘ladi.

Tahlil va olingan natijalar. Tadqiqot natijalari parametrli masalalarni yechish jarayonini faqat algebraik hisoblashlar majmuyi sifatida emas, balki o‘rinli qiymatlar sohasi, aniqlanish shartlari, xususiy holatlar va umumiy yechimlar o‘rtasidagi mantiqiy bog‘lanishlarni ochib beruvchi yaxlit metodik jarayon sifatida qarash zarurligini ko‘rsatdi. Birinchidan, parametrli masalalarni yechishda boshlang‘ich bosqich sifatida parametrning o‘rinli qiymatlari sohasini aniqlash muhim metodik shart ekanligi asoslandi. Chunki parametrning har qanday qiymatida berilgan ifoda yoki masala sharti matematik ma’noga ega bo‘lavermaydi. Shu sababli parametrning o‘rinli qiymatlari sohasi D_p ni aniqlash parametrli tenglama va tengsizliklarni to‘g‘ri tahlil qilishning zaruriy bosqichi sifatida ajratildi. Ikkinchidan, parametrli masalalarda aniqlanish

sohasi faqat noma'lum o'zgaruvchi qiymatlari bilan emas, balki parametr va o'zgaruvchi juftliklari orqali qaralishi lozimligi aniqlandi. Ya'ni parametr qatnashgan masalaning aniqlanish sohasi

$$D_F(x,a)=\left\{(x,a)\in R^2 |\ a\in D_p,\ x\in X_a\right\}$$

ko'rinishida talqin qilinishi maqsadga muvofiqdir. Bunday yondashuv o'quvchilarga masalani oddiy tenglama yoki tengsizlik sifatida emas, balki parametr qiymatlariga bog'liq o'zgaruvchan matematik obyekt sifatida tushunishga yordam beradi. Uchinchidan, parametrli masalalarni yechishning metodik ketma-ketlik ishlab chiqildi. Ushbu ketma-ketlik parametrli tenglama va tengsizliklarni yechishda algebraik va mantiqiy tahlilni o'zaro bog'laydi. Algebraik tahlil ifodani soddalashtirish, tenglama yoki tengsizlikni yechish va yechimlar to'plamini topishga xizmat qilsa, mantiqiy tahlil parametr qiymatlarining ta'sirini baholash, maxsus holatlarni ajratish va yakuniy javobning to'liqligini tekshirishga xizmat qiladi. To'rtinchidan, tadqiqot natijasida parametrli masalalarni ikki asosiy metodik turga ajratish mumkinligi aniqlandi. Birinchi turdagi masalalarda parametrning barcha o'rinli qiymatlari uchun yechimlar to'plamini topish talab qilinadi. Ikkinchi turdagi masalalarda esa parametrning shunday qiymatlari aniqlanadiki, bu qiymatlarda xususiy masala oldindan berilgan xossaga ega bo'ladi. Masalan, tenglamaning yagona yechimga ega bo'lishi, tengsizlikning barcha haqiqiy qiymatlar uchun bajarilishi yoki sistemaning yechimga ega bo'lishi kabi shartlar ikkinchi turdagi masalalarga kiradi. Beshinchidan, parametrli masalalarni yechishda umumiy yechim tushunchasi muhim nazariy-metodik ahamiyatga ega ekani aniqlandi.

Munozara. Tadqiqot natijalari parametrli masalalarni yechishda algebraik va mantiqiy tahlilni o'zaro bog'liq holda tashkil etish zarurligini ko'rsatdi. Parametrning o'rinli qiymatlari sohasini aniqlash, parametr sohasini muhim holatlarga ko'ra qismlarga ajratish va har bir xususiy holatni alohida tekshirish yechim jarayonining metodik izchilligini ta'minlaydi. Mazkur yondashuv masala aniqlanmagan holat bilan yechim mavjud bo'lmagan holatni farqlashga, o'quvchilarda tahliliy fikrlash, tasniflash va umumlashtirish ko'nikmalarini rivojlantirishga xizmat qiladi. Shu bilan birga, tadqiqot nazariy-metodik xarakterga ega bo'lgani sababli, taklif etilgan bosqichlarning samaradorligini kelgusida tajriba-sinov ishlari orqali asoslash maqsadga muvofiqdir.

Xulosa. Parametrli masalalarni yechishda algebraik va mantiqiy tahlilning uyg'un qo'llanilishi yechim jarayonini izchil va asosli tashkil etishga xizmat qiladi. Bunda parametrning o'rinli qiymatlari sohasini aniqlash, uni muhim holatlarga ajratish, xususiy holatlarni tekshirish va natijalarni umumlashtirish asosiy metodik bosqichlar sifatida namoyon bo'ladi. Mazkur yondashuv o'quvchilarning parametrli masalalarni faqat hisoblash emas, balki tahlil qilish, tasniflash va mantiqiy asoslash ko'nikmalarini rivojlantiradi. Shu bois algebraik va mantiqiy tahlil parametrli tenglama va tengsizliklarni o'qitishning samarali metodik vositasi sifatida qaralishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Hernández-Zavala, L., Acuña-Soto, C., & Liern, V. (2023). Los parámetros y las infinitas soluciones en sistemas de ecuaciones lineales [Parameters and infinite solutions in systems of linear equations]. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37, 872-899. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

2. Keene, K. A. (2007). A characterization of dynamic reasoning: Reasoning with time as parameter. The Journal of Mathematical Behavior, 26(3), 230-246. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.003

3. Steffe, L. P., & Ulrich, C. (2020). Constructivist teaching experiment. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (pp. 134-141). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_32

4. Zandieh, M., & Andrews-Larson, C. (2019). Symbolizing while solving linear systems. The International Journal on Mathematics Education, 51(7), 1183-1197. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01083-3

5. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. - М., Асар, 1996.

6. Антонов А.В. Системный анализ. — М., Высшая школа, 2006.

7. Гнеденко Б.В., Гнеденко Д.Б. Об обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий. - М., УРСС, 2006.

8. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. - М., Илекса, 2007.