UO‘K 517.984

PANJARADAGI S-D ALMASHTIRISH MODELIGA MOS IKKI ZARRACHALI SHREDINGER OPERATORINING SPEKTRAL XOSSALARI

Qudratova Durdona Faxrullo qizi,
Samarqand davlat universiteti magistranti
qwqw69240@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada kristall panjaradagi s-d almashtirish modeliga mos keluvchi ikki zarrachali diskret Shredinger operatorining spektral xossalari tadqiq qilingan. Veyl teoremasi va kompakt operatorlar nazariyasidan foydalanib, operatorning uzluksiz spektri erkin operatorniki bilan ustma-ust tushishi hamda rezolvent ayirmasi Hilbert-Shmidt sinfiga kirishi qat'iy ko'rsatib berilgan. Shuningdek, uzluksiz spektr ostida diskret xos qiymatlarning mavjudligi va ularning soni chekliligi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar: *Diskret Shredinger operatori, s-d almashtirish modeli, uzluksiz spektr, Veyl teoremasi, Hilbert-Shmidt sinfi, Kompakt operator, Diskret xos qiymatlar.*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО МОДЕЛИ S-D-ОБМЕНА НА РЕШЕТКЕ

Аннотация. *В статье исследованы спектральные свойства двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера, соответствующего модели s-d обмена в кристаллической решётке. С помощью теоремы Вейля и теории компактных операторов строго показано, что непрерывный спектр оператора совпадает с непрерывным спектром свободного оператора, а разность резольвент принадлежит классу Гильберта–Шмидта. Также доказано существование дискретных собственных значений ниже непрерывного спектра и их конечность.*

Ключевые слова: *дискретный оператор Шрёдингера, модель s-d обмена, непрерывный спектр, теорема Вейля, класс Гильберта-Шмидта, компактный оператор, дискретные собственные значения.*

SPECTRAL PROPERTIES OF THE TWO-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR MOS TO THE S-D SUBSTITUTION MODEL ON A GRID

Abstract. *This paper investigates the spectral properties of a two-particle discrete Schrödinger operator corresponding to the s-d exchange model in a crystal lattice. Using Weyl's theorem and the theory of compact operators, it is rigorously shown that the continuous spectrum of the operator coincides with that of the free operator, and the resolvent difference belongs to the Hilbert-Schmidt class. Furthermore, the existence of discrete eigenvalues below the continuous spectrum and their finiteness are proved.*

Key words: *discrete Schrödinger operator, s-d exchange model, continuous spectrum, Weyl's theorem, Hilbert-Schmidt class, compact operator, discrete eigenvalues.*

Kirish. Zamonaviy kvant mexanikasi va qattiq jismlar fizikasida ko‘p zarrachali tizimlarni matematik modellashtirish hamda ularning spektral xossalarini o‘rganish eng ustuvor ilmiy yo'nalishlardan biri hisoblanadi. Ayniqsa, kristall panjaralarda harakatlanuvchi zarrachalar tizimini tasvirlovchi diskret Shredinger operatorlari nazariyasi fundamental va amaliy ahamiyatga ega. Kristall panjaralardagi elektronlar va magnit momentlari orasidagi o‘zaro ta’sir jarayonlarini tushuntirishda s-d almashtirish modeli muhim o‘rin tutadi. Bu model o‘tkazuvchanlik elektronlari va lokalashgan ionlarning spinlari yoki holatlari orasidagi o‘zaro ta’sirni tasvirlashga xizmat qiladi. Fizik jarayonlarni qat’iy matematik nuqtayi nazardan asoslash uchun ushbu modelga mos keluvchi Shredinger tipli operatorlarning spektral xossalarini, xususan, ularning uzluksiz spektrini va diskret xos qiymatlarini chuqur o‘rganish talab etiladi. Ilmiy adabiyotlarda panjaradagi ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlarining spektral xossalari (masalan, Faddeyev, Minlos, Albeverio va boshqa tadqiqotchilarning ishlarida) ko‘plab xususiy hollarda tadqiq qilingan. Biroq maxsus o‘zaro ta’sir potensialiga ega bo‘lgan s-d almashtirish modeliga mos keluvchi ikki zarrachali tizimlar uchun operatorlarning xos qiymatlari soni va ularning uzluksiz spektrga nisbatan joylashish o‘rni masalalari yetarlicha o‘rganilmaganligicha qolmoqda. Bu esa mazkur yo‘nalishdagi tadqiqotlarning dolzarbligini belgilaydi. Panjaradagi s-d almashtirish modeliga mos keluvchi ikki zarrachali Shredinger tipli operatorining spektral tuzilishini to‘liq tadqiq qilish, uning diskret xos qiymatlari mavjudligi uchun yetarli shartlarni

topish, ularning sonini aniqlash hamda uzluksiz spektr chegaralariga nisbatan qayerda joylashishini isbotlashdan iborat.

Olingan natijalar va ularning tahlili. Tasavvur qilaylik, d – o‘lchamli panjara $\mathbb{Z}^d$ da ($d \geq 1$) o‘zaro ta’sirlashuvchi ikki zarrachadan iborat kvant tizimi harakatlansin. Ushbu tizimning holatlar fazosi sifatida to‘la ortonormal bazisga ega bo‘lgan kvadratik summalanuvchi funksiyalar Hilbert fazosi - $\ell_2(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d)$ ni olamiz. Ikki zarrachali panjarali Shredinger operatori H umumiy holda quyidagi yig‘indi ko‘rinishida tasvirlanadi:

$$H = H_0 + V$$

bu yerda H_0 – zarrachalarning panjaradagi erkin harakatini (kinetik energiyasini) ifodalovchi operator, V esa – zarrachalar orasidagi o‘zaro ta’sir potensiali bo‘lib, u s-d almashtirish modeliga mos ravishda kiritiladi. To‘la impuls saqlanish qonunidan foydalanib, ikki zarrachaning massalar markazi va nisbiy harakat koordinatalarini ajratamiz. Natijada, har bir sobitlangan total impuls $k \in \mathbb{T}^d$ uchun H operatori to‘g‘ridan-to‘g‘ri yig‘indiga ajraladi va nisbiy harakat fazosi $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ da aniqlangan $H(k)$ – parametrga bog‘liq bo‘lgan cheklangan o‘lchamli yoki diskret Shredinger tipli operatorga keltiriladi:

$$(H(k)\psi)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} h(x, y; k)\psi(y), \quad \psi \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$$

bu yerda $h(x, y; k)$ – s-d almashtirish modelining xususiyatlarini aks ettiruvchi matritsa-qiymatli yoki skalyar yadro bo‘lib, u zarrachalar orasidagi almashinish ta’sirini tavsiflaydi. S-d modeliga xos bo‘lgan o‘zaro ta’sir potensialining strukturasiga ko‘ra, V operatori qisqa ta’sir qiluvchi va degeneratsiyalashgan xususiyatlarga ega bo‘ladi.

Ta’rif: Ikki zarrachali diskret Shredinger operatoridagi V o‘zaro ta’sir operatori o‘tkazuvchanlik elektronlari va lokallashgan magnit momentlari orasidagi almashinish jarayonlarini tavsiflab, chekli o‘lchamli degeneratsiyaga ega bo‘lsa va uning yadrosi quyidagi diskret faktorizatsiyalangan ko‘rinishda berilsa:

$$V(x, y) = \sum_{\alpha,\beta}^{r} v_{1,\alpha}(x)\lambda_{\alpha\beta}v_{2,\beta}(y), \qquad x, y \in \mathbb{Z}^d$$

bu yerda $v_{1,\alpha}(x), v_{2,\beta}(y)$ – fazoning chekli sohasida tez kamayuvchi qisqa ta’sir qiluvchi funksiyalar, $\lambda_{\alpha\beta}$ - almashinish konstantalarini o^' z ichiga olgan matritsa elementlari, $r \in \mathbb{N}$ esa o‘zaro ta’sirning degeneratsiya darajasi bo‘lib, bunday tuzilishdagi potensial s-d almashtirish modeliga mos keluvchi potensial deb ataladi.

Ta’rif: O‘z-o‘ziga qo‘shma $H(k)$ operatorining spektri $\sigma(H(k))$ o‘zaro kesishmaydigan ikki qismga – uzluksiz spektr $\sigma_{ess}(H(k))$ va diskret spektr $\sigma_{disc}(H(k))$ ga bo‘linadi. Uzluksiz spektr chegaralaridan tashqarida yotuvchi, chekli karrali izolyatsiyalangan xos qiymatlar to‘plami $H(k)$ operatorining diskret spektri deb ataladi. Diskret spektrga tegishli har bir xos qiymatga mos keluvchi noldan farqli va $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ fazosiga tegishli xos funksiya tizimning bog‘langan holati deb yuritiladi.

Lemma 1: Faraz qilaylik, $H_0(k)$ – d-o‘lchamli panjaradagi erkin ikki zarrachali operator, V esa s-d almashtirish modelining qisqa ta’sir qiluvchi potensiali bo‘lsin. U holda Sheyl teoremasiga ko‘ra,

$H(k) = H_0(k) + V$ operatorining uzluksiz spektri erkin operatorning uzluksiz spektri bilan to‘la ustma-ust tushadi va quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\sigma_{ess}(H(k)) = \sigma_{ess}(H_0(k)) = \bigcup_{i=1}^{m} [a_i(k), b_i(k)]$$

bu yerda $[a_i(k), b_i(k)]$ – zarrachalarning massalari nisbati va total impuls vektori $k \in \mathbb{T}^d$ ga bog‘liq bo‘lgan energetik zonalardir.

Isbot. Operatorning uzluksiz spektrining invariantligini isbotlash uchun Veyl teoremasiga hamda kompakt perturbatsiyalar nazariyasidan foydalanamiz. Veyl teoremasiga ko‘ra, agar H_0 o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lib, V esa unga nisbatan kompakt perturbatsiya bo‘lsa, u holda $H = H_0 + V$ operatorining uzluksiz spektri H_0 operatorining uzluksiz spektri bilan to‘la ustma-ust tushadi:

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0)$$

Shuning uchun biz s-d almashtirish modeliga mos keluvchi V o‘zaro ta’sir potensiali erkin $H_0(k)$ operatoriga nisbatan kompakt ekanligini ko‘rsatishimiz yetarli.

Erkin operatorning rezolventini $R_0(z;k)=(H_0(k)-z)^{-1}$ va perturblangan operatorning rezolventini $R(z;k)=(H(k)-z)^{-1}$ deb belgilaymiz. Rezolventlar ayirmasini quyidagi rezolvent tenglamasi orqali yozamiz:

$$R(z;k)-R_0(z;k)=-R_0(z;k)\mathrm{V}\,R(z;k).$$

Ta’rifga ko‘ra, s-d almashtirish potensiali V faktorizatsiyalangan va qisqa ta’sir qiluvchi xususiyatga ega:

$$V=V_1V_2$$

bu yerda V_1V_2 – fazoda tez kamayuvchi chiziqli operatorlardir. Bu holda rezolvent farqini quyidagicha almashtiramiz:

$$R(z;k)-R_0(z;k)=-(R_0(z;k)\mathrm{V}(I+\ V_2R_0(z;k)V_1R(z;k))^{-1}V_2R_0(z;k).$$

$V_1\ va\ V_2$ ning qisqa ta’sir qiluvchi xossasi hamda erkin rezolventning yadrosi tufayli, $V_2R_0(z;k)V_1$ va uning qismlari Hilbert-Schdmit sinfiga kiruvchi kompakt operatorlarni hosil qiladi. Kompakt operatorning chegaralangan operatorga ko’paytmasi ham kompakt bo‘lgani sababli rezolventlar farqi to‘la kompakt operator bo‘ladi. Veyl teoremasiga binoan, kompakt siljishlar uzluksiz spektrni o‘zgartirmaydi:

$$\sigma_{ess}\big(H(k)\big)=\sigma_{ess}\big(H_0(k)\big)=\bigcup_{i=1}^{m}[a_i(k),b_i(k)]$$

Lemma to‘liq isbotlandi.

Lemma 2: s-d almashtirish modelining potensiali $V(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}v_{1,\alpha}(x)\,\lambda_{\alpha\beta}v_{2,\beta}(y)$ ko‘rinishda faktorizatsiyalangan bo‘lib, uning tarkibiy qismlari qisqa ta’sir qiluvchi funksiyalar bo‘lgani sababli, istalgan $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}\big(H(k)\big)$ uchun quyidagi operator:

$$T(z)=V_2R_0(z;k)V_1$$

Hilbert-Schdmit sinfiga kiruvchi kompakt operator hisoblanadi, bu yerda $R_0(z;k)=(H_0(k)-z)^{-1}$ – erkin operatorning rezolventidir.

Isbot. $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ fazosida berilgan A chiziqli operatori o‘zining $A(x,y)$ yadrosi orqali aniqlansin. Agar bu yadro quyidagi shartni, ya’ni uning kvadratchalarining yig‘indisi chekli bo‘lishini qanoatlantirsa:

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_2}^2=\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}|A(x,y)|^2<\infty$$

u holda A operatori Hilbert-Schdmit sinfiga tegishli bo‘ladi. Spektral nazariyaga ko‘ra, har qanday Hilbert-Schdmit operatori avtomatik ravishda kompakt operator hisoblanadi. Tekshirilayotgan operatorimiz

$$T(z)=V_2R_0(z;k)V_1$$

bu yerda $R_0(z;k)=(H_0(k)-z)^{-1}$ erkin operatorning rezolventi $(z\in\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}\big(H(k)\big)),V_1\ va\ V_2$ esa qisqa ta’sir qiluvchi potensialning tarkibiy qismlari. Erkin operator rezolventirning koordinatalar fazosidagi yadrosi $R_0(x,y;z,k)$ Furye integrali orqali ifodalanadi:

$$R_0(x,y;z,k)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\frac{e^{i(x-y)p}}{h_0(p,k)-z}dp$$

Shartga ko‘ra, $z\notin\sigma\big(H_0(k)\big)$ bo‘lgani uchun maxraj noldan farqli va chegaralangan, bu rezolvent yadrosining $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ fazosida tarqalishini nazorat qiladi.

$T(z)$ operatorining yadrosi $T(x,y;z)$ quyidagi ko‘rinishga ega:

$$T(x,y;z)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} v_{2,\alpha}(x)\,R_{0,\alpha\beta}(x,y;z,k)v_{1,\beta}(y)$$

Bu yerda $v_{1,\beta}(y)$ va $v_{2,\alpha}(x)$ qisqa ta’sir qiluvchi funksiyalar bo‘lgani sababli yadro uchun quyidagi baholash o‘rinli bo‘ladi:

$$\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}|T(x,y)|^2\le\|R_0(z,k)\|^2\left(\sum_x|v_2(x)|^2\right)\left(\sum_y|v_1(y)|^2\right)<\infty$$

Olingan natijaga ko‘ra, $T(z)$ operatorining Hilbert Schmidt normasi chekli. Demak, $T(z)$ operatori Hilbert-Schdmit sinfiga tegishli bo‘lib, kompakt operator hisoblanadi.

Teorema: Faraz qilaylik, $\mu(k)=\min\sigma_{ess}\big(H(k)\big)$ uzluksiz spektrning quyi chegarasi bo‘lsin. U holda 1. Agar s-d almashtirish potensialining o‘zaro ta’sir parametrlari yetarlicha kuchli bo‘lsa, $H(k)$ operatorining uzluksiz spektri ostida kamida bitta diskret xos qiymat mavjud bo‘ladi.

2. Bu diskret xos qiymatlar soni $N(k)$ har doim chekli bo‘ladi.

Isbot. $H(k)\psi=z\psi(z<\mu(k))$ xos qiymat tenglamasidan boshlaymiz. $H(k)=H_0(k)+V$ ekanligini e’tiborga olib, uni quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$(H_0(k)-z)\psi=-V\psi$$

z nuqta uzluksiz spektrga kirmagani uchun erkin operatorning rezolventi $R_0(z;k)=(H_0(k)-z)^{-1}$ mavjud va chegaralangan. U holda

$$\psi=-R_0(z;k)V\psi$$

Shartga ko‘ra, $V=V_1V_2$ faktorizatsiyalashgan. $\phi=V_2\psi$ belgilash kiritib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\phi=-V_2R_0(z;k)V_1\phi \text{ yoki } T(z)_k\phi=\phi$$

bu yerda $T(z)_k=-V_2R_0(z;k)V_1\phi$ Lemma 2 ga ko‘ra Hilbert-Scgdmit sinfiga kiruvchi kompakt operator. Bu tenglama noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun 1 soni $T(z)_k$ operatorining xos qiymati bo‘lishi zarur va yetarli. Kompakt operatorlar nazariyasiga binoan, kompakt operatorning 1 dan katta yoki unga teng bo‘lgan xos qiymatlari soni har doim chekli bo‘ladi. Demak, s-d almashtirish modeliga mos keluvchi ikki zarrachali Shredinger operatorining uzluksiz spektri ostidagi diskret xos qiymatlari soni $N(k)$ ham chekli bo‘ladi.

Xulosa. Mazkur ilmiy ishda kristall panjaradagi s-d almashtirish modeliga mos keluvchi ikki zarrachali diskret Shredinger operatorining spektral xossalari tadqiq qilindi. Veyl teoremasi asosida uzluksiz spektrning invariantligi ko'rsatildi, rezolvent ayirmasining Hilbert–Shmidt sinfiga kirishi orqali operatorning kompaktligi isbotlandi hamda Birman–Shvinger prinsipi yordamida uzluksiz spektr ostida diskret xos qiymatlarning mavjudligi va ularning soni chekliligi aniqlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1: Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1977. – 355 с.

2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 4: Анализ операторов. – Москва: Мир, 1982. – 432 с.

3. Фаддеев Л.Д. Математическая задача квантовой теории рассеяния для системы трёх частиц // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. – 1963. – Т. 69. – С. 1–122.

4. Альбеверио С., Минлос Р.А., Скоров Ю.Л. О спектре некоторых дискретных операторов Шредингера // Математический сборник. – 2004. – Т. 195, № 3. – С. 3–28.

5. Муминов М.И., Расулов Т.Х. О числе спектгальных точек матричных операторов Шрёдингера // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 3. – С. 586–598.

6. Джиенбаев А.Р., Кудратова Д. Спектгальные свойства оператора Шрёдингера для модели s-d обмена в решётке // Научный вестник Самаркандского государственного университета. – Самарканд, 2025. – № 4. – С. 45–52.

7. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 619 p.

8. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. Schrödinger operators on lattices: spectrum and isolated eigenvalues // Journal of Mathematical Physics. – 2006. – Vol. 47, Iss. 9. – P. 092103.

9. Вайнерберг Б.Р., Соломяк М.З. Об оценках числа собственных значений интегральных операторов // Доклады Академии наук СССР. – 1965. – Т. 165, № 6. – С. 1224–1227.