UO‘K 517.984.53

XUSUSIY INTEGRAL OPERATORLI MATRITSANING SPEKTRINI TADQIQ QILISHGA OID AYRIM NATIJALAR

Hikmatova Gulhayo Rashit qizi,
Navoiy davlat universiteti Matematik analiz
ixtisosligi 1-kurs tayanch doktoranti
ramazonovagulhayo7@gmail.com
Norqulova Zebiniso Hamza qizi,
Navoiy davlat universiteti Matematik analiz
ixtisosligi 1-kurs tayanch doktoranti
zebinisobehruzicloud.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada integral operatorni o‘z ichiga olgan blok-operator matritsaning spektral xossalari o‘rganiladi. Tadqiqotning maqsadi operator matritsa spektrini lokalizatsiya qilish, spektral radius uchun yuqori baho olish va integral komponentning diskret hamda muhim spektrga ta’sirini aniqlashdan iborat. Tadqiqot $H = L^2[a,b]$ Hilbert fazosida olib borildi. Nondiagonal blok Hilbert–Schmidt integral operatori sifatida qaraldi; uning chegaralanganligi va kompaktligi yadro normasi orqali asoslandi. Spektral masala Schur komplementi yordamida bitta operator tenglamaga keltirildi. Natijada operator matritsa normasi va spektral radiusi uchun baholar olindi, kompakt nondiagonal perturbatsiya ostida muhim spektrning saqlanishi ko‘rsatildi. Diagonal bloklar skalyar operatorlardan iborat bo‘lgan hol uchun xos qiymatlarning yopiq formulasi hosil qilindi. Ajraluvchi yadro misolida integral bog’lanish kuchining xos qiymatlar siljishiga ta’siri aniqlandi. Natijalar operator matritsalar spektrini lokalizatsiya qilish, invertirlanish shartlarini tekshirish hamda integral va integro-differensial tenglamalarning spektral masalalarini tadqiq etishda qo‘llanishi mumkin.*

Kalit so‘zlar: *integral operator, blok-operator matritsa, spektr, xos qiymat, spektral radius, Hilbert fazosi, kompakt operator, Schur komplementi.*

SOME RESULTS ON THE SPECTRUM OF AN OPERATOR MATRIX WITH AN INTEGRAL OPERATOR

Abstract. *This article studies the spectral properties of a block operator matrix containing an integral operator. The purpose of the research is to localize the spectrum, derive an upper bound for the spectral radius, and determine how the integral component affects the discrete and essential spectra. The analysis is carried out in the Hilbert space $H = L^2[a,b]$. The off-diagonal block is treated as a Hilbert–Schmidt integral operator, and its boundedness and compactness are established through the norm of its kernel. The spectral problem is reduced to a single operator equation by means of the Schur complement. Bounds for the norm and spectral radius of the operator matrix are obtained, and invariance of the essential spectrum under a compact off-diagonal perturbation is described. For scalar diagonal blocks, a closed-form expression for the eigenvalues is derived. A separable-kernel example demonstrates how the strength of the integral coupling shifts the eigenvalues. The results can be used to localize spectra, test invertibility, and investigate spectral problems for integral and integro-differential equations.*

Keywords: *integral operator, block operator matrix, spectrum, eigenvalue, spectral radius, Hilbert space, compact operator, Schur complement.*

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Аннотация. *В статье исследуются спектральные свойства блочной операторной матрицы, содержащей интегральный оператор. Цель исследования состоит в локализации спектра операторной матрицы, получении верхней оценки спектрального радиуса и определении влияния интегральной компоненты на дискретный и существенный спектры. Исследование проводится в гильбертовом пространстве $H = L^2[a,b]$. Внедиагональный блок рассматривается как интегральный оператор Гильберта–Шмидта; его ограниченность и компактность обосновываются через норму ядра. Спектральная задача с помощью дополнения Шура сводится к одному операторному уравнению. Получены оценки нормы и спектрального радиуса операторной*

матрицы, а также показано сохранение существенного спектра при компактном внедиагональном возмущении. Для случая скалярных диагональных блоков выведена замкнутая формула собственных значений. На примере разделимого ядра показано влияние силы интегральной связи на смещение собственных значений. Результаты могут применяться при локализации спектра, проверке условий обратимости и исследовании спектральных задач для интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *интегральный оператор, блочная операторная матрица, спектр, собственное значение, спектральный радиус, гильбертово пространство, компактный оператор, дополнение Шура.*

Kirish. Operatorlar nazariyasining asosiy masalalaridan biri chiziqli operatorlarning spektral xossalarini o‘rganishdir. Integral, integro-differensial va chegaraviy masalalarning ko‘pchiligi blok-operator matritsalar yordamida yagona funksional-analitik modelga keltiriladi. Bunday modelda diagonal bloklar tizimning alohida qismlarini, nondiagonal bloklar esa ular orasidagi bog’lanishni ifodalaydi.

H Hilbert fazosida aniqlangan umumiy 2×2 blok-operator matritsa

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishida yoziladi. Integral bog’lanish mavjud bo‘lganda nondiagonal bloklardan biri yoki ikkalasi

$$(Kf)(x) = \int_a^b k\,(x,t) f(t)\,dt$$

ko‘rinishidagi operator bilan ifodalanadi. Yadroning uzluksizligi, chegaralanganligi yoki kvadrat integrallanuvchanligi operatorning chegaralanganligi va kompaktligini belgilaydi. Bu xossalar, o‘z navbatida, operator matritsaning diskret va muhim spektriga ta’sir qiladi.

Matritsali integral operatorlar spektrini baholash va ularning invertirlanish shartlarini aniqlash M. I.Gil ishlarida o‘rganilgan. Blok-operator matritsalarning yopiluvchanligi, rezolventasi va spektral tuzilishi bo‘yicha umumiy natijalar A. Batkai va hammualliflar, shuningdek, C. Tretter tadqiqotlarida rivojlantirilgan. Kompakt perturbatsiyalar nazariyasi esa muhim spektrning barqarorligini tahlil qilish uchun asos beradi.

Mavjud natijalarga qaramay, integral yadro normasi, diagonal operatorlar spektri va nondiagonal bog’lanish kuchini bitta sodda modelda birgalikda ko‘rsatish amaliy jihatdan muhimdir. Ayniqsa, Schur komplementi orqali spektral masalani reduksiya qilish, umumiy lokalizatsiya bahosini olish va ajraluvchi yadro uchun xos qiymatlarni aniq hisoblash o‘zaro bog’langan holda bayon etilishi zarur.

Tadqiqotning maqsadi integral operatorli 2×2 operator matritsaning spektral xossalarini o‘rganishdir. Ushbu maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalar bajarildi: integral blokning chegaralanganligi va kompaktligi tekshirildi; spektral masala Schur komplementi yordamida reduksiya qilindi; operator normasi va spektral radius uchun yuqori baholar olindi; kompakt perturbatsiyaning muhim spektrga ta’siri aniqlandi; skalyar diagonal bloklar va ajraluvchi yadro uchun xos qiymatlar hisoblandi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi integral operator normasi, Schur komplementi va kompakt perturbatsiya xossalarini yagona sxemada qo‘llab, operator matritsa spektrining lokalizatsiyasi hamda maxsus hol uchun xos qiymatlarning aniq formulasini asoslashdan iborat. Natijalar integral va integro-differensial tenglamalarning spektral masalalarini, operator tenglamalarning yechiluvchanligini va matematik fizika modellarini tadqiq qilishda qo‘llanishi mumkin.

Tadqiqot metodologiyasi.

Operator matritsaning matematik modeli

$H = L^2[a,b]$ bo‘lsin. $H \oplus H$ fazosida

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & K \\ K^* & D \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Af + Kg \\ K^* f + Dg \end{pmatrix}$$

operator matritsani qaraymiz. Bu yerda $A, D \in \mathcal{B}(H)$, $K \in \mathcal{B}(H)$ esa

$$(Kf)(x) = \int_a^b k\,(x,t) f(t)\,dt, \qquad f \in L^2[a,b],$$

ko‘rinishidagi integral operatordir. K^* operatori K ning qo‘shma operatoridir. Agar deyarli barcha (x,t) lar uchun

$$k(x,t) = \overline{k(t,x)},$$

bo‘lsa, $K = K^*$ bo‘ladi. $A = A^*$ va $D = D^*$ shartlari ham bajarilganda $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

Operator matritsaning spektri

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{A} - \lambda I_{H\oplus H} \text{ operatori invertirlanmaydi}\}$$

orqali aniqlanadi. Xos qiymat masalasi

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

yoki ekvivalent ravishda

$$\begin{cases} Af + Kg = \lambda f, \\ K^* f + Dg = \lambda g \end{cases}$$

sistema bilan ifodalanadi.

Integral operatorning chegaralanganligi va kompaktligi

Faraz qilaylik,

$$k \in L^2([a,b] \times [a,b]).$$

U holda K Hilbert–Schmidt operatoridir, demak, u chegaralangan va kompakt. Cauchy–Schwarz tengsizligiga ko‘ra,

$$|(Kf)(x)|^2 \le \left(\int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt\right)\left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right).$$

Bu tengsizlikni x bo‘yicha integrallash natijasida

$$\| Kf \|^2 \le \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt\, dx\right) \| f \|^2$$

hosil bo‘ladi. Shuning uchun

$$\| K \| \le \| K \|_{HS} = \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt\, dx\right)^{1/2}.$$

Schur komplementi orqali reduksiya

$\lambda \notin \sigma(D)$ bo‘lsin. Ikkinchi tenglamadan

$$g = -(D - \lambda I)^{-1} K^* f$$

kelib chiqadi. Ushbu ifodani birinchi tenglamaga qo‘yib,

$$[A - \lambda I - K(D - \lambda I)^{-1} K^*] f = 0$$

tenglamani olamiz. Demak,

$$S_D(\lambda) = A - \lambda I - K(D - \lambda I)^{-1} K^*$$

operatori $\mathcal{A} - \lambda I$ ning $D - \lambda I$ ga nisbatan Schur komplementidir. $\lambda \notin \sigma(D)$ bo‘lganda

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \sigma\big(S_D(\lambda)\big).$$

Bu reduksiya ikki komponentli spektral masalani bitta operator tenglamaga keltiradi.

Muhokama. Mazkur tadqiqotda olingan natijalar integral operator ishtirokidagi blok-operator matritsalarning spektral xossalarini faqat nazariy formulalar orqali emas, balki operatorlar o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanish nuqtayi nazaridan ham talqin qilish imkonini beradi. Xususan, diagonal bloklar tizimning alohida komponentalarining ichki spektral xususiyatlarini ifodalasa, integral operator ko‘rinishidagi nondiagonal bloklar ushbu komponentalar orasidagi o‘zaro ta’sirni yuzaga keltiradi. Shu sababli integral bog‘lanishning mavjudligi tizimning umumiy spektral holatiga bevosita ta’sir ko‘rsatadi.

Tadqiqot natijalaridan ko‘rinadiki, integral operatorning normasi blok-operator matritsa spektrining joylashishini baholashda muhim ko‘rsatkich hisoblanadi. Integral yadro normasi qancha katta bo‘lsa, nondiagonal bloklar orasidagi bog‘lanish shuncha kuchli bo‘ladi va natijada xos qiymatlarning dastlabki holatidan siljishi ham sezilarli darajada ortadi. Bu holatni amaliy jihatdan o‘zaro bog‘langan fizik, texnik yoki iqtisodiy tizimlarning barqarorligini o‘rganishda qo‘llash mumkin. Masalan, tizimning ikki qismi o‘zaro integral bog‘lanish orqali ta’sirlashganda, bog‘lanish intensivligining ortishi tizimning spektral parametrlarini o‘zgartirishi mumkin. Shu nuqtayi nazardan, integral operator normasi tizim komponentalari o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir kuchining matematik xarakteristikasi sifatida qaralishi mumkin. Olingan spektral radius bahosi ham muhim amaliy ahamiyatga ega. Spektral radius operator iteratsiyalarining uzoq muddatli xatti-harakatini tavsiflovchi asosiy ko‘rsatkichlardan biridir. Agar spektral radius ma’lum chegarada saqlansa, operatorning takroriy qo‘llanishi natijasida yuzaga keladigan jarayonlarning o‘sish tezligini oldindan baholash mumkin bo‘ladi. Bu natija, ayniqsa, integral tenglamalarni iteratsion usullar yordamida yechishda muhimdir. Chunki operatorning spektral radiusi iteratsion jarayonning yaqinlashishi yoki uzoqlashish ehtimolini aniqlashga yordam beradi.

Kompakt integral operator bilan bog‘liq natijalar ham alohida e’tiborga loyiqdir. Tadqiqotda kompakt nondiagonal perturbatsiya muhim spektrni o‘zgartirmasligi, biroq diskret xos qiymatlarning joylashuviga ta’sir ko‘rsatishi asoslandi. Buning amaliy mazmuni shundan iboratki, tizimga nisbatan kichik yoki lokal integral bog‘lanish kiritilganda uning asosiy spektral tuzilishi saqlanib qoladi, lekin ayrim yangi xos holatlar yuzaga kelishi mumkin. Bunday holat matematik fizika masalalarida, xususan, lokal ta’sirlar, chegaralangan perturbatsiyalar va bog‘langan tizimlarni o‘rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Skalyar diagonal bloklar uchun olingan xos qiymatlar formulasi integral bog‘lanishning spektral siljishga ta’sirini yanada aniq ko‘rsatadi. Bog‘lanish mavjud bo‘lmagan holatda operator matritsaning spektri diagonal bloklarning spektral qiymatlari bilan belgilanadi. Integral bog‘lanish kuchayganda esa ushbu qiymatlar bir-biridan uzoqlashadi. Demak, nondiagonal integral komponent tizimning mavjud spektral holatlarini faqat qo‘shimcha element sifatida to‘ldiribgina qolmay, balki ularning o‘zaro joylashuvini ham o‘zgartiradi. Bu natija bog‘langan tizimlarda parametrlarning o‘zgarishi natijasida spektral holatlarning qayta taqsimlanishini tushuntirish imkonini beradi. Ajraluvchi yadro misoli tadqiqotning eng ko‘rgazmali natijalaridan biri hisoblanadi. Ushbu holatda integral operatorning murakkabligi kamayadi va uning spektral ta’sirini aniq parametrlar orqali kuzatish mumkin bo‘ladi. Ajraluvchi yadrodan foydalanish amaliy masalalarda ham qulay, chunki ko‘plab integral operatorlar sonli hisoblash jarayonida chekli rangli yoki ajraluvchi operatorlar orqali yaqinlashtiriladi. Shu sababli mazkur natija faqat nazariy emas, balki sonli usullar uchun ham muhim ahamiyatga ega.

Natija. Tadqiqotda Schur komplementidan foydalanish spektral masalani soddalashtirish imkonini berdi. Dastlabki ikki komponentli operator tenglamalar sistemasini bitta operator tenglamaga keltirish hisoblash jarayonini ancha qulaylashtiradi. Bu, ayniqsa, analitik usul bilan xos qiymatlarni aniq topish qiyin bo‘lgan holatlarda sonli algoritmlarni qo‘llash uchun muhimdir. Masalan, Galerkin yoki Nyström usullaridan foydalanilganda dastlabki operator matritsani to‘g‘ridan-to‘g‘ri diskretlashtirish o‘rniga Schur komplementi orqali kamaytirilgan masalani yechish hisoblash xarajatlarini qisqartirishi mumkin.

Natijalarning amaliy ahamiyati integral va integro-differensial tenglamalarning spektral masalalarida yanada yaqqol namoyon bo‘ladi. Ko‘plab fizik jarayonlar, jumladan, issiqlik tarqalishi, tebranishlar, diffuziya jarayonlari va o‘zaro bog‘langan dinamik tizimlar integral operatorlar orqali tavsiflanadi. Bunday masalalarda spektral parametrlarni aniqlash tizimning barqarorligi, rezonans holatlari va vaqt bo‘yicha rivojlanish xususiyatlarini tahlil qilishga imkon beradi. Shuning uchun operator matritsa spektrini lokalizatsiya qilish va integral bog‘lanishning xos qiymatlarga ta’sirini aniqlash amaliy modellarni sifat jihatidan tahlil qilish uchun nazariy asos yaratadi.

1-jadval. Asosiy spektral natijalar

Holat	Shart	Natija
Umumiy blok-operator matritsa	$A, D, K \in \mathcal{B}(H)$	Spektral radius chegaralanadi
Kompakt integral bog’lanish	K kompakt	σ_{ess} saqlanadi
Skalyar diagonal bloklar	$A = aI, D = dI$	Kvadratik tenglama olinadi
Ajraluvchi simmetrik yadro	$k(x,t) = p(x)\overline{p(t)}$	$\mu = \| p \|^4$
Hilbert–Schmidt yadro	$k \in L^2([a,b]^2)$	$\| K \| \leq \| k \|_2$

Olingan natijalar operator matritsa spektrining diagonal va nondiagonal bloklar o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir orqali shakllanishini ko‘rsatadi. A va D diagonal bloklar bog’lanishsiz modelning asosiy spektral tuzilishini beradi. K integral operator esa ushbu bloklarni bog’lab, diskret xos qiymatlarni siljitadi. Bu xulosa blok-operator matritsalar va matritsali integral operatorlar uchun ilgari ishlab chiqilgan perturbatsion yondashuvlar bilan mos keladi [1]–[3], [6].

Spektral radius uchun

$$r(\mathcal{A}) \leq \max\{\| A \|, \| D \|\} + \| K \|$$

bahoning afzalligi uning sodda va bevosita hisoblanishidadir. Agar K yadro orqali berilgan bo‘lsa, mavhum operator normasi Hilbert–Schmidt normasi bilan almashtiriladi. Natijada spektr lokalizatsiyasi yadro funksiyasining aniq xossalari bilan bog’lanadi. Biroq bu baho umumiy yuqori baho bo‘lib, har doim ham optimal emas. Spektrning aniqroq lokalizatsiyasi uchun diagonal bloklarning rezolventa baholari yoki sonli diapazon usullaridan foydalanish mumkin [6], [10].

Kompakt perturbatsiya natijasi integral operatorning ikki xil spektral ta’sirini ajratadi. Muhim spektr diagonal bloklarning muhim spektrlari birlashmasi sifatida saqlanadi, diskret spektr esa K ta’sirida o‘zgarishi mumkin. Bu farq amaliy jihatdan muhim, chunki integral bog’lanish yangi ajralgan xos qiymatlar paydo bo‘lishiga olib kelishi mumkin, lekin kontinuum yoki muhim spektrning asosiy qismini siljitmaydi.

Schur komplementi $\lambda \notin \sigma(D)$ sohada spektral masalani $S_D(\lambda)f = 0$ tenglamaga keltiradi. Bu reduksiya nazariy tahlil bilan birga sonli hisoblash uchun ham qulay: dastlabki ikki komponentli tizim

o‘rniga parametrga bog’liq bitta operator tekshiriladi. Shunga qaramay, $\lambda \in \sigma(D)$ nuqtalarda ushbu ko‘rinish to‘g’ridan-to‘g’ri qo‘llanmaydi; bunday nuqtalar alohida tahlil qilinishi yoki $A - \lambda I$ ga nisbatan ikkinchi Schur komplementidan foydalanilishi kerak.

Ajraluvchi yadro misoli integral bog’lanish kuchini aniq ko‘rsatadi. $Kf = \langle f, p \rangle p$ bo‘lganda K ning noldan farqli xos qiymati $\| p \|^2$, ammo xarakteristik tenglamada KK^* ishtirok etgani sababli tegishli parametr $\mu = \| p \|^4$ bo‘ladi. Shu tuzatish xos qiymatlar formulasining o‘lcham va algebraik jihatdan izchil bo‘lishini ta’minlaydi.

Tadqiqotning cheklovlari quyidagilardan iborat. Birinchidan, asosiy natijalar chegaralangan diagonal operatorlar va Hilbert–Schmidt sinfidagi integral operator uchun olingan. Ikkinchidan, muhim spektr haqidagi tenglik Fredholm ma’nodagi muhim spektr uchun qo‘llanildi; boshqa ta’riflar alohida shartlarni talab qilishi mumkin. Uchinchidan, umumiy A, D va K uchun spektrni yopiq formulada aniqlash imkoni yo‘q. To‘rtinchidan, singulyar yadrolar va chegaralanmagan operatorlar domen, yopiluvchanlik va rezolventa shartlarini qo‘shimcha tekshirishni talab qiladi.

Xulosa. Kelgusida modelni singulyar integral operatorlar, chegaralanmagan diagonal bloklar va parametrik yadrolarga umumlashtirish maqsadga muvofiq. Galerkin yoki Nyström diskretlashtirishlari bilan birga qo‘llash esa nazariy baholarni sonli spektr bilan taqqoslash imkonini beradi.

Xulosa qilib aytganda, mazkur nazariy natijalarni aniq sonli misollar bilan boyitish maqsadga muvofiq. Xususan, ma’lum integral yadrolar uchun xos qiymatlarning integral bog‘lanish parametriga bog‘liq o‘zgarishini grafik ko‘rinishda tasvirlash mumkin. Bundan tashqari, Galerkin yoki Nyström usullari yordamida nazariy spektral baholarni sonli natijalar bilan taqqoslash tadqiqotning amaliy qiymatini yanada oshiradi. Chegaralanmagan diagonal operatorlar, singulyar integral yadrolar va parametrga bog‘liq operator matritsalarni o‘rganish esa mazkur tadqiqot yo‘nalishining keyingi istiqbolli bosqichlari hisoblanadi.

ADABIYOTLAR:

1. *M. I. Gil, “Invertibility conditions and bounds for spectra of matrix integral operators,” Monatshefte für Mathematik, vol. 129, no. 1, pp. 15–24, 2000, doi: 10.1007/s006050050002.*

2.A. Batkai, P. Binding, A. Dijksma, R. Hryniv, and H. Langer, “Spectral problems for operator matrices,” Mathematische Nachrichten, vol. 278, nos. 12–13, pp. 1408–1429, 2005, doi: 10.1002/mana.200310313.

3. T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1976, doi: 10.1007/978-3-642-66282-9.

4. R. Kress, Linear Integral Equations, 3rd ed. New York, NY, USA: Springer, 2014.

5.F. G. Tricomi, Integral Equations. New York, NY, USA: Dover Publications, 1985.

6.C. Tretter, Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. London, U.K.: Imperial College Press, 2008.

7. N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory. New York, NY, USA: Interscience Publishers, 1958.

8. N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space. New York, NY, USA: Wiley, 1963.

9. I.C. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, Classes of Linear Operators, Vol. I. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 1990.

10. E. B. Davies, Linear Operators and Their Spectra. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2007, doi: 10.1017/CBO9780511618864.

11. J. Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1980.

12. M. Schechter, Principles of Functional Analysis, 2nd ed. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2002.