**UO‘K 517.386**

## BIRINCHI TUR SIRT INTEGRALLARI HAQIDA

***Asqaraliyeva Muxtasar Azizjon qizi,***
*Qo‘qon davlat universiteti o‘qituvchisi, PhD*
*asqaraliyevamuxtasar@gmail.com*

***Annotatsiya****. Ushbu maqola birinchi tur sirt integrallari haqida bo‘lib, unda sirt tushunchasi, sodda sirtlar, uzluksiz akslantirishlar, sirtning parametrik tenglamasi, sirtning maxsus nuqtasi, sirt normali, birinchi tur sirt integrali tushunchasi haqida so‘z borgan. Uning xossalari keltirib o‘tilgan. Birinchi tur sirt integralining mavjudligi va uni hisoblash haqida teorema va isboti hamda hisoblash formulalari keltirib chiqarilgan.*

***Kalit so‘zlar****: sirt, yuz, integral, akslantirish, normal, xossa, uzluksizlik, grafik.*

## О ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ПЕРВОГО РОДА

***Аннотация****. Данная статья посвящена поверхностным интегралам первого рода, в ней рассматриваются понятие поверхности, простые поверхности, непрерывные отражения, параметрическое уравнение поверхности, специальная точка поверхности, нормаль к поверхности, понятие поверхностного интеграла первого рода. Приводятся его свойства. Представлены теорема и доказательство существования поверхностного интеграла первого рода и его вычисление, а также формулы для вычисления.*

***Ключевые слова****: поверхность, грань, интеграл, отражение, нормаль, свойство, непрерывность, график.*

## ON FIRST-TYPES SURFACE INTEGRALS

***Abstract****. This article is about surface integrals of the first kind, in which the concept of a surface, simple surfaces, continuous reflections, parametric equation of a surface, special point of a surface, surface normal, the concept of a surface integral of the first kind are discussed. Its properties are given. The theorem and proof of the existence of a surface integral of the first kind and its calculation, as well as calculation fo‘rmulas are given.*

***Keywords:*** *surface, face, integral, reflection, normal, property, continuity, graph.*

**Kirish.** Tekislikda egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

tenglamalar sistemasi bilan (xususan, $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$ tenglama bilan) aniqlanishini ko‘rdik. Ravshanki, egri chiziq $x(t)$, $y(t)$ funksiyalarga bog‘liq. Agar $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz $x'(t)$, $y'(t)$ hosilalarga ega bo‘lsa, uni silliq egri chiziq deyiladi.

Egri chiziqlar nazariyasida muhim tushunchalardan biri egri chiziqning uzunligi bo‘lib, u egri chiziqqa chizilgan siniq chiziq perimetrining limiti sifatida ta’riflanganligi va uning uzunligi quyidagi

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

fo‘rmula bilan ifodalanishi ma’ruzalarda bayon etilgan.Tekislikda egri chiziq tushunchasiga o‘xshash fazoda sirt tushunchasi kiritilsada, uning o‘ziga xos tomonlari mavjud.Fazoda sodda sirtlar - sfera, silindr va shunga o‘xshash sirtlar va ularning yuzi, yuzining hisoblash fo‘rmulalari o‘quvchiga ma’lum.

Biz quyida umumiy ko‘rinishdagi sirtlar, ularning yuzi, yuzini topish fo‘rmulalari kurs uchun kerak bo‘ladigan hajmda qisqacha bayon etamiz.

**Manba va usullar.** Ushbu mavzu ko‘plab matematik tahlil fanining adabiyotlarida o‘rganilgan va malumotlar keltirilgan. Jumladan, Gulmirza Xudoyberganov, Azizjon Kenjabayevich Vorisov, Hojakbar

Turobovich Mansurov, Bohodir Allaberdiyevich Shoimqulovlarning “Matematik analizdan ma’ruzalar” nomli o‘quv qo‘llanmasida, T.Azlarov, H.Mansurovning “Matematik analiz”, 2-qism, G.Xudoyberganov, A.Varisov, H.Mansurov, B.Shoimqulovning “Matematik analiz” 3-qism kitoblarida chuqur o‘rganilgan.

**Natija va topilmalar.**

Sirt tushunchasi. Aytaylik, $UOV$ Sirt tushunchasi. Aytaylik $\Delta$ tekislikdagi to‘plamda

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

to‘plamda funksiyalar berilgan bo‘lib, ular $\Delta$ Sirt tushunchasi. Aytaylik tekislikdagi to‘plamda funksiyalar berilgan bo‘lib, ular

uzluksiz bo‘lsin. $(u_0, v_0) \in \Delta$ nuqtani olib, yuqoridagi funksiyalarning shu nuqtadagi qiymatlarini topamiz:

$$x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0),\ z_0 = z(u_0, v_0).$$

Hosil bo‘lgan $(x_0, y_0, z_0)$ ni $R^3$ fazodagi $M_0$ nuqtaning koordinatalari deb qaraymiz: $M_0 = M(x_0, y_0, z_0)$. Ravshanki, $(u, v)$ nuqta $\Delta$ to‘plamda o‘zgarganda $(x, y, z)$ lar $R^3$ fazoda biror $S$ to‘plamni hosil qiladi. Demak, (1) munosabatni $\Delta$ to‘plamni $S$ to‘plamga uzluksiz akslantirish deb qarash mumkin.

Agar (1) akslantirish o‘zaro bir qiymatli akslantirish bo‘lsa, ya’ni $\Delta$ to‘plamning turli $(u, v), (\bar{u}, \bar{v})$ nuqtalarini $S$ to‘plamning turli $(x, y, z), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , $S$ to‘plamni $R^3$ fazoda sirt deb qarash mumkin. Odatda, bunday sirtlar sodda sirtlar deyiladi. Shu sababli

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad ((u,v) \in \Delta) \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{2}$$

tenglamalar sistemasi sirtning parametrik tenglamasi deyiladi, bunda u va v lar parametrlar.

Xususan ($u = x, v = y$ bo‘lganda) ushbu

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

tenglamalar sitemasi aniqlaydigan sirt $z = f(x, y)$ (3)

tenglama bilan ifodalanadi.

Faraz qilaylik, (1) funksiyalar $\Delta$ to‘plamda uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lib, ular yordamida quyidagi

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix} \tag{4}$$

funksional matritsa tuzilgan bo‘lsin.

Aytaylik, $(u_0, v_0) \in \Delta$ nuqta uchun (bu nuqtaning sirtda aksi S $M_0(x_0, y_0, z_0)$ bo‘ladi) (4) matritsaning ikkinchi tartibli determinantidan kamida bittasi noldan farqli, masalan

$$\begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y) \tag{5}$$

deylik. Unda oshkormas funksiyalar haqidagi teoremaga ko‘ra sirtning nuqta atrofidagi qismi quyidagi.

Agar $(u_0, v_0)$ uchun (4) matritsaning barcha ikkinchi tartibli deter¬mi¬nantlari nolga teng bo‘lsa, $S$ Sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi, uning maxsus nuqtasi deyiladi. Sirtning maxsus nuqta atrofidagi qismini (5) ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydi.

Faraz qilaylik, $S$ sirt

$$z = f(x, y)$$

tenglama bilan aniqlangan bo‘lsin. Bunda $f(x, y)$ funksiya $XOY$ tekislikdagi $D$ to‘plamda uzluksiz va uzluksiz $f_x^{'}(x, y), f_y^{'}(x, y)$ xususiy hosilalarga ega. Bunday $S$ sirt har bir $M(x, y, z) \in S$ nuqtada urinma tekislikka ega. Urinma tekiclikning tenglamasi ushbu

$$Z - z = f_x'(x, y)(X - x) + f_y'(x, y)(Y - y)$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bunda $X, Y, Z$ lar urinma tekilikdagi o‘zga¬ruv¬chi nuqtaning koordinatalari. Modomiki, $S$ sirt $M(x, y, z)$ nuqtada urinma tekislikka ega ekan, unda shu nuqtada sirtning normalini aniqlash mumkin. (Ma’lumki, sirtning $M(x, y, z)$ nuqtasidan o‘tuvchi va shu nuqtadagi urinma tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq sirt normali deyiladi). Bu holda normalning tenglamasi

$$\frac{X - x}{f_x^{'}(x, y)} = \frac{Y - y}{f_y^{'}(x, y)} = \frac{Z - z}{-1}$$

bo‘ladi. Bu yerda $X, Y, Z$ lar normaldagi o‘zgaruvchi nuqtaning koordinatalari.

Masalan, ushbu

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

sirtga (paraboloidga) (1,1,3) nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik tenglamasi

$$Z - 3 = 2(X - 1) + 4(Y - 1)$$

normalning tenglamasi bo‘ladi.

$$\frac{X - 1}{2} = \frac{Y - 1}{2} = \frac{Z - 1}{-1}$$

Normalning $OX, OY, OZ$ koordinatalar o‘qlarining musbat yo‘na¬lish¬lari bilan tashkil etgan burchaklarini mos ravishda $\alpha, \beta, \gamma$ deyilsa, unda $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ lar normalning yo‘naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Faraz qilaylik, $S$ fazodaga sodda sirt bo‘lsin. Ravshanki, bu sirt¬ning har bir nuqtasida urinma tekislik mavjud bo‘lib, u urinish nuqtasi sirti bo‘ylab uzluksiz o‘zgarib borsa, mos urinma tekislik ham o‘z holatini uzluksiz o‘zgartirib boradi.

$S$ sirtda biror $M_0$ nuqtani olaylik. Bu nuqta orqali o‘tkazilgan sirt normali ikki yo‘nalishga ega bo‘lib, ulardan birini tayinlaymiz. So‘ng $M_0$ nuqtadan chiqib, shu $M_0$ ga qaytadigan yopiq chiziqni (konturni) qaraylik. Bu kontur $S$ sirtga tegishli bo‘lib, uning chegarasini kesmasin. $M_0$ nuqtada sirt normalining ma’lum yo‘nalishi olinganligini e’tiborga olib, o‘zgaruvchi $M$ nuqtani $M_0$ dan boshlab, kontur bo‘yicha harakatlantirib, yana $M_0$ nuqtaga qaytganda (ravshanki, nuqta kontur bo‘ylab o‘zgarganda mos nuqtadagi sirt normali ham o‘zgarib boradi) ikki hol yuz beradi:

1. $M_0$ nuqtadagi sirt normalining yo‘nalishi qaytib shu nuqtaga kelganda normalning yo‘nalishi teskarisiga o‘zgaradi;

2. $M_0$ nuqtadagi sirt normalining yo‘nalishi qaytib shu nuq¬ta¬ga kelganda ham normalning yo‘nalishi o‘zgarmaydi.

Aytaylik, $S$ ikki tomonli sirt bo‘lsin. Bu sirtda ixtiyoriy $M_0$ nuqtani tayinlab, bu nuqtani boshqa $M_1 \in S$ nuqta bilan shu sirtga tegishli bo‘lgan va uning chegarasini kesmaydigan $K$ egri chiziq yordamida birlashtiramiz. So‘ng $M_0$ nuqtada sirt normalning aniq yo‘nalishini tayinlaymiz.

Aytaylik, o‘zgaruvchi $M$ nuqta $K$ egri chiziq bo‘yicha $M_0$ dan boshlab $M_1$ nuqtaga tomon harakatlana borsin. Natijada o‘zgaruvchi $M$ nuqtadagi sirt normalining yo‘nalishi ham uzluksiz o‘zgara boradi va $M_1$ nuqtaga kelganda sirt normali ma’lum yo‘nalishga ega bo‘ladi. Normalning bu yo‘nalishi nuqtalarni birlashtiruvchi egri chiziqqa bog‘liq bo‘lmaydi. Shuni isbotlaymiz.

$M_0$ va $M_1$ nuqtalarni ikkita turli $K_1$ va $K_2$ chiziqlar bilan birlashtirilganda o‘zgaruvchi nuqta $M$ nuqtaga kelganda sirt normalining yo‘nalishi turlicha bo‘lsin deb faraz qilaylik. Unda $K_1$ ва $K_2$ lardan hosil bo‘lgan yopiq kontur

$$M_0M_1(K_1) \cup M_0M_1(K_2^{-1})$$

bo‘yicha o‘zgaruvchi $M_0$ nuqtaga kelganda normalning yo‘nalishi o‘zgarib qoladi. Bu esa qaralayotgan sirtning ikki tomonli ekanligiga zid. Demak, ikki tomonli sirtning bitta nuqtasida normal yo‘nalishni tanlash bilan uning barcha nuqtalarida ham normal yo‘nalishi bir qiymatli aniqlanar ekan.

Ma’lumki,

$$z = f(x, y)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt normalining yo‘naltiruvchi kosinuslari

$$\cos\alpha = \frac{-f_x'(x,y)}{\pm\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}},\quad \cos\beta = \frac{-f_y'(x,y)}{\pm\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

(6) da $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ larni ifodalovchi fo‘rmulalardagi kvadrat ildiz oldidagi ishorani tanlash bilan sirt tomoni aniqlanadi.

Agar kvadrat ildiz oldidagi ishoralardan musbati olinsa, sirtning barcha nuqtalarida

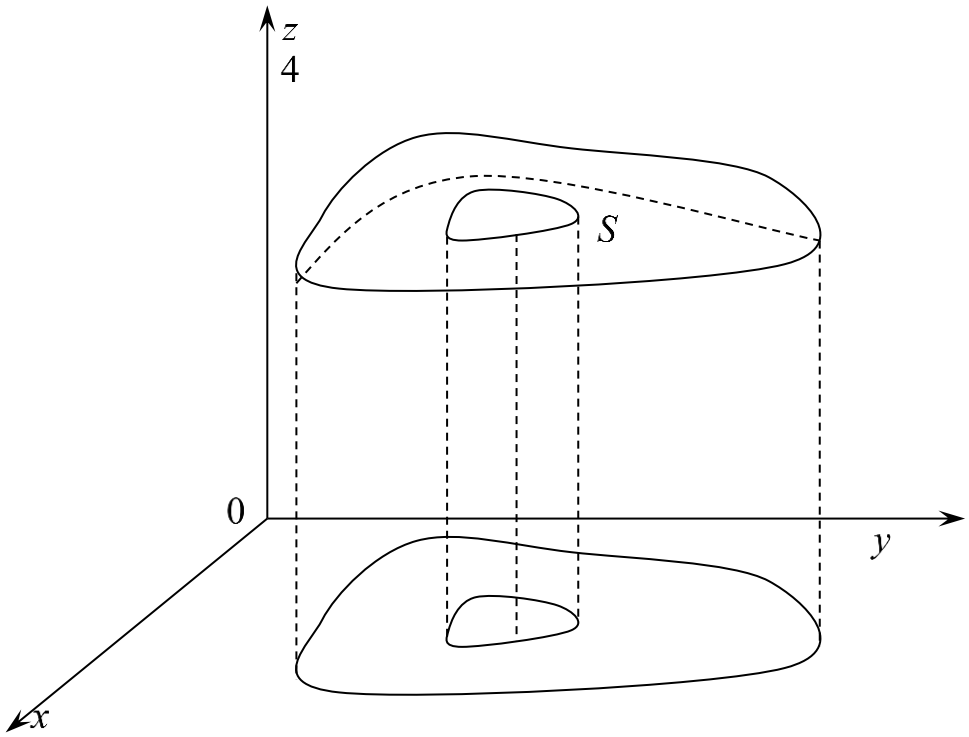
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}}$$

ifoda musbat bo‘ladi. Bu holda sirtning olingan tomoniga mos normal bilan $OZ$ o‘qi orasidagi burchak o‘tkir bo‘lib, aniqlanadigan sirt tomoni ustki (yuqori) tomon bo‘ladi.

Agar kvadrat ildiz oldidagi ishoralardan manfiysi olinsa, sirtning olingan tomoniga mos normal bilan $OZ$ o‘qi orasidagi burchak o‘tmas bo‘lib, aniqlanadigan sirt tomoni ostki (past) tomon bo‘ladi.

Sirt yuzi va uni hisoblash. Ma’lumki, egri chiziqning uzunligi unga ichki chizilgan siniq chiziq perimetrining siniq chiziq tomonlarining barchasi nolga intilgandagi limiti sifatida ta’riflangan edi. Shu ta’rif singari sirt yuzi ta’riflanadigan bo‘lsa, ya’ni sirtning yuzga unga ichki chizilgan ko‘pyoqli sirtning yuzining ko‘pyoqlini tashkil etgan barcha tomonlari (yoqlari) diametrlari nolga intilgandagi limiti deyiladigan bo‘lsa, ma’nosizlik yuzaga kelishi mumkin. Shvars tomonidan keltirilgan misolda to‘g‘ri doiraviy silindrga ichki chizilgan ko‘pyoqli (yoqlari uchburchaklardan iborat ko‘pyoqli) yasalganki, barcha yoqlarining diametrlari nolga intilganda bu chizilgan ko‘pyoqli yuzasi limitga ega bo‘lmaydi. Demak, aylanma silindrning yuzasi bo‘laturib, aytilgan ta’rif bo‘yicha uning yuzaga ega bo‘lmasligi kabi g‘ayritabiiy holatga duch kelamiz. Demak, sirt yuzi uchun bunday ta’rif yaroqsiz bo‘lib, uni boshqacha ta’riflashga to‘g‘ri keladi.

Biz quyida ushbu $z = f(x, y)$ tenglama bilan aniqlanadigan




**1-rasm.**

sirt yuzi tushunchasini va uni hisoblash fo‘rmulasini keltiramiz $f(x,y)$ funksiya *D* tekislikdagi yuzaga ega bo‘lgan to‘plamda uzluksiz va uzluksiz $f_x^{'}(x,y),\ f_y^{'}(x,y)$ xususiy hosilalarga ega.

$D$ to‘plamning biror

$$P_D=\{D_1,D_2,...,D_n\}$$

bo‘laklashini olaylik. Bu bo‘laklashning bo‘lakchalari $D_1,D_2,...,D_n$ bo‘ladi. Olingan bo‘laklashning bo‘luvchi chiziqlarini yo‘naltiruvchilar sifatida qarab, ular orqali yasovchilari $OZ$ o‘qiga parallel bo‘lgan silindrik sirtlar o‘tkazamiz. Bu silindrik sirtlar $S$ sirtning ushbu

$$P_S=\{S_1,S_2,...,S_n\}$$

bo‘laklashini hosil qiladi. Uning bo‘lakchalari $S_1,S_2,...,S_n$ bo‘ladi.

Endi har bir $D_k\ \ (k=1,2,...,n)$ da ixtiyoriy $(\xi_k,\eta_k)$ nuqta olib , $S$ sirtda unga mos nuqta $(\xi_k,\eta_k,z_k)\ \ (z_k=f(\xi_k,\eta_k))$ ni topamiz. Ravshanki $(\xi_k,\eta_k,z_k)\in S_k\ \ (k=1,2,...,n)$ bo‘ladi. So‘ngra $S$ sirtga shu $(\xi_k,\eta_k,z_k)$ nuqtada urinma tekislik o‘tkazamiz. Bu urinma tekislik bilan yuqorida aytil¬gan silindrik sirtning kesishishidan hosil bo‘lgan urinma tekislik qismini $T_k$ bilan, uning yuzini esa $\mu T_k$ bilan belgilaymiz.

$D_k$ to‘plam $T_k$ ning ortoganal proyeksiyasi bo‘lgani uchun

$$\mu D_k=\mu T_k\cdot|\cos\gamma_k|$$

bo‘ladi, bunda $\gamma_k$ - $S$ sirtga $(\xi_k,\eta_k,z_k)\ \ (z_k=f(\xi_k,\eta_k))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tekislik normalining o‘qi bilan tashkil etgan burchak.

Ravshanki, $\lambda_{P_D}\to 0$ da $\lambda_{P_S}\to 0$ bo‘ladi.

Agar $\lambda_{P_D}\to 0$ da quyidagi

$$\sum_{k=1}^{n}\mu T_k$$

yig‘indi chekli limitga ega bo‘lsa, $S$ sirt yuzaga ega deyiladi, limitning qiymati esa sirtning $S$ yuzi deyiladi. Demak,

$$\mu S = \lim_{\lambda_{P_D}\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu T_k .$$

Ma’lumki,

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1+ f_x'^2(\xi_k,\eta_k)+ f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}}$$

bo‘lib,

$$\mu T_k = \frac{1}{\cos\gamma_k}\cdot \mu D_k$$

tenglikdan esa $\sum_{k=1}^{n}\mu T_k = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+ f_x'^2(\xi_k,\eta_k)+ f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}\cdot \mu D_k$

tenglikdan esa bo‘lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikning o‘ng tomonidagi yig‘indi $\sqrt{1+ f_x'^2(x,y)+ f_y'^2(x,y)}$

funksiyaning integral yig‘indisi bo‘ladi. Bu funksiya $D$ to‘plamda uzluksiz, binobarin integrallanuvchi. Demak,

$$\lim_{\lambda_{P_D}\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+ f_x'^2(\xi_k,\eta_k)+ f_y'^2(\xi_k,\eta_k)}\cdot \mu D_k =$$

$$= \iint_D \sqrt{1+ f_x'^2(x,y)+ f_y'^2(x,y)}dxdy.$$

Shunday qilib $S$ sirtning yuzi

$$\mu S == \iint_D \sqrt{1+ f_x'^2(x,y)+ f_y'^2(x,y)}dxdy \qquad (7)$$

bo‘ladi.

Birinchi tur sirt integrali tushunchasi. Fazoda ushbu

$$z = z(x,y) \qquad (8)$$

tenglama bilan aniqlangan $S$ sirtni qaraylik. Bunda $z(x,y)$ funksiya $D\subset R^2$ to‘plamda uzluksiz va uzluksiz $z'_x(x,y),\ z'_y(x,y)$ xususiy hosilalarga ega. Ma’lumki, (8) sirt yuzaga ega bo‘lib, uning yuzi

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1+ z'^2_x(x,y)+ z'^2_y(x,y)}dxdy$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $S$ sirtda $f(x,y,z)$ funksiya berilgan bo‘lsin. $S$ sirtni undagi chiziqlar yordamida $S_1,S_2,...,S_n$ bo‘lakchalarga ajratib, uning

$$P = \{S_1,S_2,...,S_n\}$$

bo‘laklashini hosil qilamiz. Bu bo‘laklashning diametrini $\lambda p$ deylik. Endi har bir $S_k$ da $(k = 1,2,3,4,...,n)$ ixtiyoriy $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ nuqtani olib, bu nuqtadagi funksiyaning qiymati $f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ ni $S_k$ ning yuzi $\mu S_k$ ga ko‘paytiramiz. So‘ng quyidagi

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\mu S_k \qquad (9)$$

Yig‘indini tuzamiz. Ravshanki bu yig‘indi $f(x,y,z)$ funksiyaga , $P$ bo‘laklashga hamda $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ nuqtaga bog‘liq bo‘ladi:

$$\sigma=\sigma(f,P,(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)).$$

Odatda, (9) yig‘indi $f(x,y,z)$ funksiyaning integral yig‘indisi (Riman yig‘indisi) deyiladi.

Ta’rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ topilsaki, $S$ sirtning diametri $\lambda_p<\delta$ bo‘lgan har qanday bo‘laklash uchun tuzilgan $\sigma$ yig‘indi ixtiyoriy $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in S_K$ nuqtada

$$|\sigma-J|<\varepsilon$$

tengsizlikni bajarsa , $f(x,y,z)$ funksiya $S$ sirt bo‘yicha integrallanuvchi deyilib, $J$ son esa $f(x,y,z)$ funksiyaning birinchi tur sirt integrali deyiladi. Birinchi tur sirt integrali quyidagicha

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds$$

kabi belgilanadi:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda_p\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\mu S_k.$$

Keltirilgan ta’rifdan ko‘rinadiki, birinchi tur sirt integrali sirtning tomoniga bog‘liq bo‘lmaydi. Xususan, $f(x,y,z)=1$ бўлса,

$$\iint\limits_S ds=\mu S$$

bo‘ladi.

Birinchi tur sirt integralining mavjudligi va uni hisoblash. Aytaylik, $f(x,y,z)$ funksiya (8) tenglama bilan berilgan $S$ sirtda berilgan bo‘lsin.

Teorema. Arap $f(x,y,z)$ funksiya $S$ sirtda uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning sirt bo‘yicha birinchi tur sirt integrali mavjud va

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}dxdy \quad (10)$$

bo‘ladi.

$S$ sirtning ixtiyoriy $P_s=\{S_1,S_2,S_3,..,S_n\}$ bo‘laklashini olib unga nisbatan integral yig‘indi

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\mu S_k$$

ni tuzamiz.

$$P_s=\{S_1,S_2,S_3,..,S_n\}$$

Bo‘laklarni tuzamiz. $S_1,S_2,...,S_n$ larning $XoY$ tekislikdagi proyeksiyalari $D_1,D_2,D_3,...,D_n$ lar to‘plamning bo‘laklashini hosil qiladi.

Ma’lumki, $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in S_k$, $\zeta_k=z(\xi_k\eta_k)$.

(9) formulaga ko‘ra

$$\mu S_k=\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\mu D_k$$

bo‘ladi.

O‘rta qiymat haqidagi teoremadan foydalanib topamiz:

$$\mu S_k=\sqrt{1+x'^2z(\xi^*{}_k,\eta^*{}_k)+y'^2z(\xi^*{}_k,\eta^*{}_k)}\mu D_k$$

bunda $(\xi^*{}_k,\eta^*{}_k)\in D_k$.

Natijada $\sigma$ integral yig‘indi quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k))\sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}\mu D_k \ . \quad (11)$$

Bu tenglikning o‘ng tomondagi yig‘indi ushbu

$f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}$ (12) ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyaning integral yig‘indisi $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k))\sqrt{1 + z'^2_x(\xi_k, \eta_k) + z'^2_y(\xi_k, \eta_k)}\mu D_k$ (13)

ni eslatadi. (11) va (13) yig‘indilarni solishtirib ularning farqi integral yig‘indida $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$ nuqta ixtiyoriy bo‘lgan holda (10) yig‘indida esa esa $(\xi_k^*, \eta_k^*) \in D_k$ nuqta o‘rta qiymat haqidagi teoremaga muvofiq bo‘lgan tayin nuqta bo‘lishidadir. (11) funksiya $D$ to‘plamda uzluksiz, binobarin u $D$ to‘plamda integrallanuvchi bo‘lganligi sababli

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k))\sqrt{1 + z'^2_x(\xi_k, \eta_k) + + z'^2_y(\xi_k, \eta_k)}\mu D_k =$$

$$= \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*, \eta_k^*, z(\xi_k^*, \eta_k^*))\sqrt{1 + z'^2_x(\xi_k^*, \eta_k^*) + z'^2_y(\xi_k^*, \eta_k^*)}\mu D_k =$$

$$= \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}dxdy$$

bo‘ladi.

Demak,

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z'^2_x(x,y) + z'^2_y(x,y)}dxdy .$$

Agar fazodagi S sirt ushbu $x = x(y,z)$ tenglama bilan aniqlangan bo‘lib, bunda $x = x(y,z)$ funksiya uzluksiz va uzluksiz $x'_y(y,z)$, $x'_z(y,z)$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, bu sirtda uzluksiz bo‘lgan $f(x,y,z)$ funksiyaning birinchi tur sirt integrali mavjud va

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1 + x'^2_y(y,z) + x'^2_z(y,z)}dydz \quad (14) \text{ bo‘ladi.}$$

Agar fazodagi $S$ sirt ushbu

$$y = y(z,x)$$

tenglama bilan aniqlangan bo‘lib, bunda $y = y(z,x)$ funksiya uzluksiz va uzluksiz $y'_z(z,x)$, $y'_x(z,x)$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, bu sirtda aniqlangan uzluksiz $f(x,y,z)$ funksiyaning birinchi tur sirt integrali mavjud va

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y(z,x),z)\sqrt{1 + y'^2_z(z,x) + y'^2_x(z,x)}dzdx \quad (15)$$

bo‘ladi. Bu tasdiqlar yuqorida keltirilgan teoremaning isboti kabi isbotlanadi.

**Xulosa.** Birinchi tur sirt integrallari ikki karrali integrallarga keltirilib, (9), (14) va (15) formulalar yordamida hisoblanadi. Birinchi tur sirt integralining xossalari. Birinchi tur sirt integrali ikki karrali integral xossalari kabi xossalarga ega bo‘ladi. Birinchi tur sirt integrali yordamida sirtlarning yuzi, massali sirtning massasi, og‘irlik markazlari, inersiya momentlari topiladi.

***ADABIYOTLAR:***

*1. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, 2- қисм, Тошкент, «Ўзбекистон», 1994,1995.*

*2. Архипов Г., Садовничий В., Чубариков В. Лекции по математическому анализу, Москва, «Высшая школа», 1999.*

*3. Фихтенгольц Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ТТ, II, III, Москва физмат-лит, 2001.*

*4. Демидович Б.П., «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Учеб. пособие для вузов. М.: ООО «Издательство Астрель» ООО «Издательство АСТ», 2003 г*

*5. Худойберганов Г., Варисов А., Мансуров Ҳ., Шоимқулов Б. Математик анализ, 3-қисм, Тошкент, «ЎзМУ», 2006.*

*6. Turgunbayev R., Ismailov Sh., Abdullayev O.. Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar yechish.*

*7. Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. "Matematik analizdan ma'ruzalar" nomli o'quv qo'llanmasi. 2010.*

*8. Тошметов Ў, Тургунбаев Р. Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами, 2-қ. ТДПУ. 2010 й.*

*9. Toshmetov O'., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: "Extremum-Press", 2015.*

*10. Toshmetov O'., Turgunbayev R., Saydamatov E., Madirimov M. Matematik analiz I-qism. T.: "Extremum-Press", 2015.*

*11. Turgunbayev R., Qodirov K., Bakirov T. Matematik analiz (Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi). 2020.*