UO‘K 517.91

HOSILAGA NISBATAN YECHILGAN BA’ZI BIR DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Arziyeva Surayyo Ismatullayevna,
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti
“Sun’iy intellekt va matematika” kafedrasi dotsenti v.b.
Navoiy shahri, O‘zbekiston
a.i.suray@mail.ru

Annotatsiya. *Ushbu maqolada hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalarning ayrim maxsus turlari, xususan, Darbu va Yakobi tenglamalarining asosiy xossalari hamda ularni integrallash usullari o‘rganilgan. Bir jinsli funksiyalar xossasi va mos almashtirish yordamida Darbu tenglamasini Bernulli tenglamasiga keltirish imkoniyati ko‘rsatilgan. Yakobi tenglamasini algebraik tenglamalar sistemasining haqiqiy yechimi asosida koordinatalar boshini ko‘chirish orqali Darbu tenglamasiga keltiruvchi soddalashtirilgan usul taklif etilgan. Taklif qilingan usulning samaradorligi aniq misol va uning geometrik talqini yordamida asoslab berilgan. Olingan natijalardan oliy ta’lim amaliyotida foydalanish mumkin.*

Kalit so‘zlar: *differensial tenglama, Darbu tenglamasi, Yakobi tenglamasi, Bernulli tenglamasi, bir jinsli differensial tenglama, almashtirish usuli, kvadratura, umumiy integral, maxsus yechim.*

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация. *В данной статье исследуются некоторые специальные виды дифференциальных уравнений первого порядка, решённых относительно производной, в частности основные свойства уравнений Дарбу и Якоби, а также методы их интегрирования. Показана возможность приведения уравнения Дарбу к уравнению Бернулли с помощью свойства однородных функций и соответствующей подстановки. Предложен упрощённый способ приведения уравнения Якоби к уравнению Дарбу путём переноса начала координат в действительное решение алгебраической системы. Эффективность предложенного способа обоснована конкретным примером и его геометрической интерпретацией.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, уравнение Дарбу, уравнение Якоби, уравнение Бернулли, однородное дифференциальное уравнение, метод подстановки, квадратура, общий интеграл, особое решение.*

SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLVED WITH RESPECT TO THE DERIVATIVE

Abstract.*This article studies special types of differential equations solved with respect to the derivative, namely the Darboux and Jacobi equations and the methods of their integration. It is shown that the Darboux equation can be reduced to the Bernoulli equation by means of the homogeneity property and a suitable substitution. A simplified way of reducing the Jacobi equation to the Darboux equation by translating the origin is proposed. Its efficiency is justified by an example and its geometric interpretation.*

Key words: *differential equation, Darbou equation, Jacobi equation, Bernoulli equation, homogeneous differential equation, substitution method, quadrature, general integral, particular solution.*

Kirish. Differensial tenglamalar nazariyasi tabiiy va texnik fanlarning ko‘plab masalalarini matematik modellashtirishning asosiy vositalaridan biri hisoblanadi. Mexanika, fizika, biologiya, iqtisodiyot va boshqa sohalarda uchraydigan jarayonlarning aksariyati hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Bunday tenglamalarning umumiy yechimini kvadraturalarda topish har doim ham mumkin bo‘lavermaydi, shu sababli ularning integrallanuvchi maxsus sinflarini ajratib o‘rganish nazariy hamda amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega.

Birinchi tartibli tenglamalarning integrallanuvchi sinflari orasida o‘zgaruvchilari ajraladigan, bir jinsli, chiziqli va Bernulli tenglamalari eng ko‘p o‘rganilgan turlar hisoblanadi. Ularning har biri uchun mos almashtirish tanlash orqali yechim kvadraturaga keltiriladi. Shu bilan birga, amaliyotda bevosita bu sinflarga

kirmaydigan, ammo maxsus almashtirishlar yordamida ularga keltirilishi mumkin bo‘lgan tenglamalar ham ko‘p uchraydi. Darbu va Yakobi tenglamalari aynan shunday tenglamalar sirasiga kiradi.

Mavzuga doir adabiyotlar tahlili. Oddiy differensial tenglamalarning analitik yechish usullari va ularning tatbiqlari V. Henner, A. Nepomnyashchy, T. Belozerova hamda M. Khenner mualliflarining monografiyasida keng yoritilgan; unda birinchi tartibli tenglamalarning asosiy integrallanuvchi sinflari va ularni almashtirishlar yordamida soddalashtirish masalalari batafsil bayon etilgan [1]. T. W. Judsonning elektron darsligida esa oddiy differensial tenglamalarni yechish usullari va amaliy tatbiqlari zamonaviy uslubiy yondashuv asosida keltirilgan [2].

So‘nggi yillardagi tadqiqotlarda Darbu polinomlari va ular yordamida polinomial differensial sistemalarning integrallanuvchanligini o‘rganish masalasi alohida o‘rin egallamoqda. M. V. Deminaning ishlarida Levinson–Smit hamda Lienar tipidagi polinomial differensial tenglamalarning integrallanuvchanligi va yechilishi Darbu yondashuvi asosida tadqiq etilgan [3; 4]. Keltirilgan adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, Darbu va Yakobi tenglamalarini o‘quv hamda amaliy maqsadlarda nisbatan soddaroq usul bilan integrallash masalasi bugungi kunda ham o‘z ahamiyatini yo‘qotmagan.

Klassik adabiyotlarda birinchi tartibli differensial tenglamalarning integrallanuvchi sinflari to‘liq tasniflangan. E. Kamke ma’lumotnomasida bunday tenglamalarning keng ro‘yxati va ularni yechish usullari jamlangan [5]. A.D. Polyanin va V.F. Zaytsev ma’lumotnomasida esa Darbu va Yakobi tipidagi tenglamalar alohida sinf sifatida ajratilib, ularning umumiy integrali bilan bog‘liq natijalar keltirilgan [6]. L.E. Elsgolts va N.M. Matveyev darsliklarida almashtirish usulining nazariy asoslari va uning qo‘llanilish chegaralari batafsil yoritilgan [7; 8]. Mazkur manbalarda keltirilgan usullar nazariy jihatdan to‘liq bo‘lsa-da, amaliy hisoblashlarda ancha ko‘p oraliq amallarni talab qiladi.

Tadqiqot obyekti va qo‘llanilgan metodlar. Tadqiqot obyekti sifatida hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalarning maxsus sinflari — Darbu va Yakobi tenglamalari olingan. Tadqiqotda bir jinsli funksiyalarning xossalari, o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli, koordinatalar boshini ko‘chirish hamda Bernulli tenglamasini integrallash usullaridan foydalanilgan. Olingan natijalarning to‘g‘riligi aniq misol yordamida tekshirib ko‘rilgan.

Taklif etilayotgan yondashuv quyidagi ketma-ket bosqichlardan iborat: birinchidan, berilgan tenglama (5) ko‘rinishga keltiriladi va uning koeffitsiyentlari aniqlanadi; ikkinchidan, (7) algebraik sistema tuzilib, uning haqiqiy yechimi topiladi; uchinchidan, koordinatalar boshi shu yechimga ko‘chiriladi va tenglama Darbu ko‘rinishiga keladi; to‘rtinchidan, bir jinsli funksiyalar xossasidan foydalanib almashtirish bajariladi va Bernulli tenglamasi hosil qilinadi; beshinchidan, Bernulli tenglamasi ma’lum usulda integrallanadi va eski o‘zgaruvchilarga qaytiladi. Ushbu bosqichlarning har biri elementar amallar bilan bajarilishi usulning asosiy afzalligini tashkil etadi.

Ushbu maqolada diffirensial tenglamalarning ba’zi turlari haqida fikr yuritib ularning xossalari va integrallash usullarini ko‘rib o‘tamiz. Ushbu

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + P(x,y)(xdy - ydx) = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishidagi tenglama Darbu tenglamasi deyiladi. Darbu Gaston (1842-1917)– fransuz matematigi. Geometriya va differensial tenglamalar sohasida ishlab, mexanikaga doir tadqiqotlar ham olib borgan olim.

Demak, yuqorida berilgan (1) tenglamada N, M lar $m-$ darajali, $P(x,y)$ esa $l-$ darajali bir jinsli funksiyalar, $l \neq m-1$, agar $l = m-1$ bo‘lsa, (1) tenglama bir jinsli tenglama bo‘ladi. Bu tenglama $y = zx$ almashtirish orqali Bernulli tenglamasiga keltiriladi, z yangi izlanuvchi funksiya. Bir jinsli funksiyalarning xossasiga asosan (1) tenglamani

$$x^m M\left(1,\frac{y}{x}\right)dx + x^m N\left(1,\frac{y}{x}\right)dy + x^l P\left(1,\frac{y}{x}\right)\cdot(xdy - ydx) = 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Ushbu

$$dy = xdz + zdx,\ \ xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 dz \qquad (3)$$

tengliklardan foydalanib, (2) ni

$$x^m M(1,z)dx + x^m N(1,z)(xdz + zdx) + x^l P(1,z)x^2 dz = 0$$

ko‘rinishida yozamiz, yoki x^m ga qisqartirib,

$$[M(1,z) + zN(1,z)]dx + [xN(1,z) + P(1,z)x^{l+1-m}]dz = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Uni $\frac{dx}{dz}$ ga nisbatan quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dx}{dz} + \frac{N(1,z)}{N(1,z)+zN(1,z)}x = \frac{P(1,z)x^{l+1-m}}{N(1,z)+zN(1,z)} \qquad (4)$$

bu yerda $M(1,z) + zN(1,z) \neq 0, x = 0$ bo‘lganda bu amalni bajarish mumkin. (4) tenglama izlanuvchi funksiya x va argument z ga nisbatan Bernulli tenglamasidir. Bu tenglamani integrallab, y o‘zgaruvchiga qaytsak, (1) tenglamaning umumiy integralini topgan bo‘lamiz.

Agar $z_k (k = 1,2, \dots)$

$$N(1, z) + zN(1, z) = 0$$

tenglamaning haqiqiy ildizlari bo‘lsa, $y = z_k x$ ko‘rinishdagi to‘g‘ri chiziqlar (1) tenglamaning yechimlari bo‘ladi, ular tenglamaning maxsus yechimlari ham bo‘lishi mumkin. Ushbu

Maxsus yechimlar masalasi alohida e’tiborni talab qiladi. Yuqorida keltirilgan to‘g‘ri chiziqlar integral chiziqlar oilasining o‘ramasi bo‘lishi yoki oilaning alohida a’zosi sifatida namoyon bo‘lishi mumkin. Ularning maxsus yechim ekanligini aniqlash uchun umumiy integral topilgandan so‘ng qo‘shimcha tekshirish o‘tkaziladi: agar berilgan chiziq umumiy integraldan o‘zgarmasning hech qanday qiymatida hosil bo‘lmasa, u maxsus yechim hisoblanadi. Amaliy masalalarda bunday yechimlar ko‘pincha jarayonning muvozanat holatlariga mos keladi, shu bois ularni tashlab yuborish masalaning to‘liq tahlil qilinmasligiga olib keladi [7].

$$(a_0 + a_1 x + a_2 y)(xdy - ydx) - (b_0 + b_1 x + b_2 y)dy$$
$$+(c_0 + c_1 x + c_2 y)dx = 0 \qquad (5)$$

ko‘rinishdagi tenglama Yakobi tenglamasi deyiladi. Yakobi Karl Gustav (1804-1851) nemis matematigi. Elliptik funksiyalar nazariyasini yaratgan olimlardan biri. Differensial tenglamalar, integral hisob, sonlar nazariyasi sohalarida ham ishlagan. Yuqorida berilgan (5) tenglamada $a_i, b_i, c_i -$ o‘zgarmas haqiqiy sonlar $(i = 0, 1, 2)$. Xususiy hollar:

1. $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ bo‘lsa, (5) dan Darbu tenglamasi;
2. $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ bo‘lsa, (5) dan chiziqli tenglama;
3. $a_1 = a_2 = 0$ bo‘lsa, (5) dan bir jinsli tenglama hosil bo‘ladi.

Keltirilgan xususiy hollar Yakobi tenglamasining umumlashtiruvchi xarakterini ko‘rsatadi: bitta tenglama sinfi o‘z ichiga bir necha ma’lum sinfni qamrab oladi. Bu esa uni o‘rganishning nazariy ahamiyatini oshiradi, chunki Yakobi tenglamasi uchun topilgan integrallash usuli avtomatik ravishda barcha xususiy hollarga ham tatbiq etiladi. Boshqa tomondan, koeffitsiyentlar orasidagi munosabatlarga qarab tenglamaning tuzilishi sezilarli o‘zgarishi mumkin, shuning uchun har bir aniq masalada avval koeffitsiyentlar tahlil qilinishi, so‘ngra mos usul tanlanishi maqsadga muvofiqdir [6].

Muhokama. Umuman, Yakobi tenglamasi har doim kvadraturaga integrallanadi. Ko‘pgina adabiyotlarda berilgan integrallash usullari murakkabroq deb hisoblab, biz ancha soddaroq usulni tavsiya etamiz.

(5) tenglamani quyidagi

$$(R_1 + yP_1)dx - (Q_1 - xP_1)dy = 0 \qquad (6)$$

ko‘rinishda yozib olish mumkin, bu yerda

$$P_1 = a_0 + a_1 x + a_2 y,\ Q_1 = b_0 + b_1 x + b_2 y, R_1 = c_0 + c_1 x + c_2 y.$$

Ushbu

$$\begin{cases} R_1 - yP_1 = 0 \\ Q_1 - xP_1 = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

algebraik tenglamalar sistemasi hech bo‘lmaganda bitta (x_0, y_0) haqiqiy yechimga ega, eng ko‘p yechimlari soni uchta, ya’ni x, y tekislikda (7) dagi ikkinchi tartibli chiziqlar hech bo‘lmaganda bitta nuqtada kesishadi. Koordinatalar boshini $x - x_0 = \bar{x}, y - y_0 = \bar{y}$ almashtirish kiritib, (x_0, y_0) nuqtaga ko‘chiramiz, u vaqtda

$$\left[M_x^1(x_0, y_0)\bar{x} + M_y^1(x_0, y_0)\bar{y}\right]dx -$$
$$\left[N_x^1(x_0, y_0)\bar{x} + N_y^1(x_0, y_0)\bar{y} - \bar{x}(a_1\bar{x} + a_2\bar{y})\right]dy = 0 \qquad (8)$$

tenglama hosil bo‘ladiki, bu Darbu tenglamasidan iboratdir.

Natijalar va ularning tahlili. Misol: Ushbu

$$(1 + 2x + 3y)(xdy - ydx) + (2x + 4y)dy + (1 - 3x - 2y)dx = 0$$

tenglamani Darbu tenglamasiga keltiring.

Yechish. Tenglamani

$$[1 - 3x - 3y - y(2x + 3y)]dx + [3x + 4y + x(2x + 3y)]dy = 0$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

Bu misol uchun (7) algebraik sistema

$$\begin{cases} 1 - 3x - 3y - y(2x + 3y) = 0 \\ 3x + 4y + x(2x + 3y) = 0 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu sistemaning yechimlarini topamiz. Masalan, $x = -1,\ y = 1$ bu sistemaning yechimidir, ya’ni

$$x + 1 = \bar{x}, \qquad y - 1 = \bar{y}$$

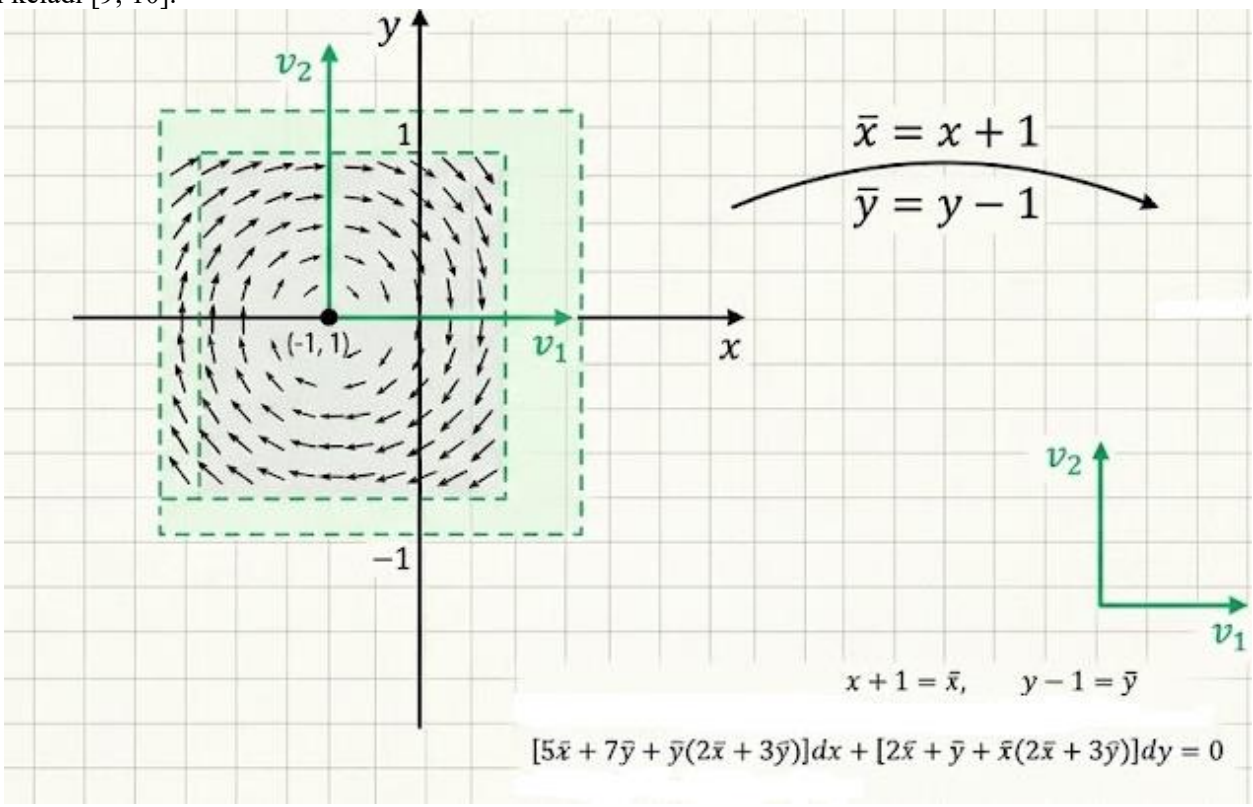
almashtirish bajarsak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$[5\bar{x} + 7\bar{y} + \bar{y}(2\bar{x} + 3\bar{y})]dx + [2\bar{x} + \bar{y} + \bar{x}(2\bar{x} + 3\bar{y})]dy = 0$$

Bu esa Darbu tenglamasidir.

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, (7) algebraik sistemaning haqiqiy yechimini topish va koordinatalar boshini shu nuqtaga ko‘chirish Yakobi tenglamasidagi ozod hadlarni yo‘qotadi hamda uni bir jinsli tuzilishga ega Darbu tenglamasiga aylantiradi. Hosil bo‘lgan Darbu tenglamasi esa yuqorida ko‘rsatilgan almashtirish orqali Bernulli tenglamasiga, undan esa kvadraturaga keltiriladi. Shunday qilib, boshlang‘ich tenglamani yechish jarayoni ketma-ket bajariladigan ikkita almashtirishdan iborat sodda algoritm ko‘rinishida ifodalanadi.

Shuni ta’kidlash lozimki, (7) sistemaning yechimi yagona bo‘lmasligi mumkin. Bunday holda koordinatalar boshini turli nuqtalarga ko‘chirish natijasida bir-biridan farq qiluvchi, ammo ekvivalent Darbu tenglamalari hosil bo‘ladi. Amaliy nuqtayi nazardan koeffitsiyentlari sodda bo‘lgan variantni tanlash keyingi hisoblashlarni yengillashtiradi. Agar sistema haqiqiy yechimga ega bo‘lmasa yoki yechim murakkab ko‘rinishda bo‘lsa, mazkur usul samarasiz bo‘lib qoladi va boshqa integrallash usullariga murojaat qilishga to‘g‘ri keladi [9; 10].



1-rasm. Darbu tenglamasining geometrik interpretatsiyasi

1-rasmda keltirilgan geometrik talqin almashtirishning mohiyatini yaqqol ifodalaydi: koordinatalar boshining yangi nuqtaga ko‘chirilishi natijasida integral chiziqlar oilasining tuzilishi o‘zgarmaydi, faqat tenglamaning ko‘rinishi soddalashadi. Bu esa qo‘llanilgan almashtirishning ekvivalentligini va olingan natijaning to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Taklif etilayotgan usulning asosiy afzalligi shundaki, u qo‘shimcha murakkab hisoblashlarni talab qilmaydi va faqat elementar algebraik amallarga hamda ma’lum almashtirishlarga tayanadi. Bu esa mazkur usuldan oliy o‘quv yurtlarida differensial tenglamalar kursini o‘qitishda, amaliy va laboratoriya mashg‘ulotlarini tashkil etishda, shuningdek talabalarning mustaqil ishlarini yo‘lga qo‘yishda foydalanish imkonini beradi.

Usulning cheklovlari ham mavjud. Birinchidan, u faqat (5) ko‘rinishdagi tenglamalarga, ya’ni koeffitsiyentlari chiziqli bo‘lgan holga tatbiq etiladi. Ikkinchidan, Bernulli tenglamasini integrallash bosqichida hosil bo‘ladigan kvadraturalar har doim ham elementar funksiyalarda ifodalanmasligi mumkin. Uchinchidan, algebraik sistemaning yechimini topish yuqori darajali tenglamalarda qo‘shimcha qiyinchilik tug‘diradi. Shunga qaramay, o‘quv jarayonida uchraydigan masalalarning aksariyati uchun taklif etilgan algoritm to‘liq yetarli bo‘lib, an’anaviy usullarga nisbatan sezilarli qulaylik beradi.

Xulosa. Xulosa qilib aytganda, differensial tenglamalarning maxsus turlarini o‘rganish va ularni sodda ko‘rinishdagi tenglamalarga keltirish integrallash jarayonini sezilarli darajada yengillashtiradi. Maqolada Darbu tenglamasini bir jinsli funksiyalar xossasi va mos almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga

keltirish imkoniyati ko‘rsatildi. Bu usul Darbu tenglamasining umumiy integralini topishda samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi. Yakobi tenglamasi esa o‘zining umumiy ko‘rinishidan tashqari, Darbu, chiziqli va bir jinsli tenglamalarni xususiy hollar sifatida o‘z ichiga olishi bilan alohida ahamiyatga ega. Uni algebraik tenglamalar sistemasining haqiqiy yechimlari asosida koordinatalar sistemasini almashtirish orqali Darbu tenglamasiga keltirish mumkin. Keltirilgan misol mazkur usulning amaliy jihatdan qulay va sodda ekanligini ko‘rsatadi. Shunday qilib, Darbu va Yakobi tenglamalarini o‘rganish differensial tenglamalarni tasniflash, ularning o‘zaro bog‘liqligini aniqlash hamda murakkab tenglamalarni ma’lum klassik tenglamalarga keltirish orqali yechish imkoniyatlarini kengaytiradi. Mazkur usullar differensial tenglamalarni o‘qitish va amaliy masalalarni yechishda samarali metodik vosita sifatida foydalanilishi mumkin.

Ishning asosiy natijalarini quyidagicha umumlashtirish mumkin: 1) Darbu tenglamasini bir jinsli funksiyalar xossasi asosida Bernulli tenglamasiga keltirish sxemasi to‘liq bayon etildi; 2) Yakobi tenglamasini koordinatalar boshini ko‘chirish orqali Darbu tenglamasiga keltiruvchi soddalashtirilgan algoritm taklif qilindi; 3) algoritmning ishlashi aniq misolda ko‘rsatilib, uning geometrik talqini berildi; 4) usulning qo‘llanilish chegaralari va cheklovlari aniqlandi. Olingan natijalardan differensial tenglamalar kursini o‘qitishda, amaliy mashg‘ulotlar va talabalarning mustaqil ishlarini tashkil etishda foydalanish mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Henner V., Nepomnyashchy A., Belozerova T., Khenner M. Ordinary Differential Equations: Analytical Methods and Applications. Springer, 2023. — 606 p.

2. Judson T. W. The Ordinary Differential Equations Project. 2023 edition. — Ordinary differential equations, ularning yechish usullari va amaliy tatbiqlariga bag‘ishlangan elektron darslik.

3. Demina M. V. The Darboux Polynomials and Integrability of Polynomial Levinson–Smith Differential Equations // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. — 2023. — Vol. 33, No. 03. — Article 2350035.

4. Demina M. V. Integrability and solvability of polynomial Liénard differential systems // Studies in Applied Mathematics. — 2023. — Vol. 150, Issue 3. — P. 755–817.

5. Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. 1. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1959. — 666 S.

6. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.

7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

8. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — Минск: Вышэйшая школа, 1974. — 768 с.

9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 331 с.

10. Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. 3rd ed. — San Diego: Academic Press, 1997. — 801 p.