УДК 517.984

О СУЩЕСТВОВАНИИ И РАСПОЛОЖЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА

Латипов Шердор Мирзоевич,
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам
Самарканд, Узбекистан
sh.m.latipov@samdu.uz
Латипова Дилдора Азаматовна,
Самаркандский государственный педагогический институт, Самарканд, Узбекистан
dlatipova@mail.ru
Исмоилов Голибжон Исмоил угли,
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам,
Самарканд, Узбекистан
golibjon.ismoilov.tdtu@gmail.com
Очилова Саодат Акмаловна,
магистрант Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова,
Самарканд, Узбекистан

Аннотация. *Рассматривается обобщённая модель Фридрихса в гильбертовом пространстве* $\mathbb{C} \oplus L^{2,e}(\mathbb{T})$*, включающая одномерную дискретную компоненту, оператор умножения, межканальную связь и одноранговое возмущение. Установлены ограниченность и самосопряжённость оператора, определён его существенный спектр. Для спектральных параметров вне существенного спектра получен характеристический определитель, и вычислены резольвентные интегралы. При* $\lambda \leq 0$ *доказана монотонность соответствующей скалярной функции, и получен критерий наличия собственного значения выше существенного спектра. Отдельно исследован вырожденный случай* $k = \pm\pi$*.*

Ключевые слова: *обобщённая модель Фридрихса, существенный спектр, дискретный спектр, одноранговое возмущение, характеристический определитель, собственные значения.*

MSC 2020: 47A10, 47A55, 47N50.

BIR UMUMLASHGAN FRIDRIXS MODELINING XOS QIYMATLARI MAVJUDLIGI VA JOYLASHUVI HAQIDA

Annotatsiya. $\mathbb{C} \oplus L^{2,e}(\mathbb{T})$ *Gilbert fazosida aniqlangan umumlashgan Fridrixs modeli o‘rganiladi. Operator bir o‘lchamli diskret komponenta, ko‘paytirish operatori, kanallararo bog‘lanish va bir rangli g‘alayonni o‘z ichiga oladi. Operatorning chegaralanganligi va o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi isbotlanadi, muhim spektri topiladi. Muhim spektrdan tashqaridagi spektral parametrlar uchun xarakteristik determinant chiqarilib, rezolventa integrallari hisoblanadi.* $\lambda \leq 0$ *holida mos skalyar funksiyaning qat’iy o‘sishi isbotlanib, muhim spektrning yuqorisida xos qiymat mavjudligi mezoni beriladi.* $k = \pm\pi$ *dagi aynigan holat alohida tadqiq etiladi.*

Kalit so‘zlar: *umumlashgan Fridrixs modeli, muhim spektr, diskret spektr, bir rangli g‘alayon, xarakteristik determinant, xos qiymatlar.*

ON THE EXISTENCE AND LOCATION OF EIGENVALUES OF A GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL

Abstract. *We study a generalized Friedrichs model on the Hilbert space* $\mathbb{C} \oplus L^{2,e}(\mathbb{T})$*, consisting of a one-dimensional discrete component, a multiplication operator, an interchannel coupling, and a rank-one*

perturbation. We establish boundedness and self-adjointness and determine the essential spectrum. For spectral parameters outside the essential spectrum, we derive a characteristic determinant and evaluate the associated resolvent integrals. For $\lambda \le 0$, strict monotonicity of a scalar function yields a criterion for the existence of an eigenvalue above the essential spectrum. The degenerate case $k = \pm\pi$ is considered separately.

Keywords: *generalized Friedrichs model, essential spectrum, discrete spectrum, rank-one perturbation, characteristic determinant, eigenvalues.*

Введение и постановка задачи. Модель Фридрихса является одной из основных операторных моделей для исследования взаимодействия дискретной и непрерывной спектральных компонент. Её обобщённые варианты естественным образом возникают при связи дискретного состояния с оператором умножения в присутствии дополнительных конечномерных возмущений.

Основная задача настоящей работы состоит в определении собственных значений, лежащих вне существенного спектра, и установлении условий их существования.

Рассматривается семейство операторов, зависящих от квазиимпульса k и двух вещественных параметров связи γ и λ. Параметр γ характеризует связь одномерной дискретной компоненты с непрерывной, а параметр λ определяет возмущение ранга один в непрерывной компоненте.

Исследование проводится в несколько этапов. Сначала устанавливаются основные операторные свойства. Затем для спектральных параметров вне существенного спектра выводится характеристический определитель. Наконец, задача о собственных значениях сводится к скалярным уравнениям и формулируются точные критерии, связанные с границами спектральной зоны.

Существенно различать собственное значение и пороговую точку: подстановка границы существенного спектра в определитель сама по себе не позволяет считать эту точку изолированным собственным значением вне существенного спектра. Пороговые собственные значения и пороговые резонансы требуют отдельного исследования.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$, $d\eta(q) = dq/(2\pi)$ и $L^{2,e}(\mathbb{T})$ — пространство чётных функций из $L^2(\mathbb{T})$. В пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^{2,e}(\mathbb{T})$ при $k \in [-\pi, \pi]$ положим

$$c = c(k) = \cos\frac{k}{2} \in [0,1], \qquad \varepsilon(k) = -4(1+c), \tag{1}$$
$$\varepsilon_k(q) = 2(1 - c\cos q), \;\; v(q) = \cos q.$$

Определим $M_k f = \varepsilon_k f$, $Vf = v\langle f, v\rangle$, $H_\lambda(k) = M_k + \lambda V$, где скалярное произведение линейно по первому аргументу. При вещественных γ, λ зададим:

$$H_{\gamma,\lambda}(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon(k) & C_\gamma^* \\ C_\gamma & H_\lambda(k) \end{pmatrix}, \qquad C_\gamma f_0 = \gamma f_0 \mathbf{1}, \quad C_\gamma^* f = \gamma\langle f, \mathbf{1}\rangle. \tag{2}$$

Поскольку M_k — ограниченный самосопряжённый оператор, V — самосопряжённый оператор ранга один, а C_γ^* сопряжён к C_γ, оператор (2) ограничен и самосопряжён.

Существенный спектр и характеристический определитель

Положим $a(k) = 2(1-c)$ и $b(k) = 2(1+c)$.

Теорема 1. *Для всех $k \in [-\pi, \pi]$ и $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$*

$$\sigma_{\text{ess}}\left(H_{\gamma,\lambda}(k)\right) = [a(k), b(k)].$$

При $c = 0$ правая часть понимается как одноточечное множество $\{2\}$.

Доказательство. Спектр M_k равен существенной области значений непрерывной функции ε_k, то есть $[a(k), b(k)]$. Разность $H_{\gamma,\lambda}(k) - (\varepsilon(k) \oplus M_k)$ имеет конечный ранг. Утверждение следует из теоремы Вейля; одномерное слагаемое не влияет на существенный спектр. □

Для $z \in \mathbb{C}\backslash[a(k), b(k)]$ определим аналитические функции

$$\begin{aligned} A(k,z) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{d\eta(q)}{\varepsilon_k(q) - z}, B(k,z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos q \, d\eta(q)}{\varepsilon_k(q) - z}, \\ C(k,z) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q \, d\eta(q)}{\varepsilon_k(q) - z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $c > 0$ и $z \notin [a(k), b(k)]$. Тогда z — собственное значение $H_{\gamma,\lambda}(k)$ тогда и только тогда, когда*

$$D_{\gamma,\lambda}(k,z) := \big(z-\varepsilon(k)\big)\big(1+\lambda C(k,z)\big) + \gamma^2[A(k,z)\big(1+\lambda C(k,z)\big) - \lambda B(k,z)^2] = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Для решения $H_{\gamma,\lambda}(k)(f_0,f_1) = z(f_0,f_1)$ положим $I_0 = \langle f_1, \mathbf{1}\rangle$, $I_1 = \langle f_1, v\rangle$. Тогда

$$\big(z-\varepsilon(k)\big)f_0 = \gamma I_0, \qquad f_1(q) = -\frac{\gamma f_0 + \lambda I_1 \cos q}{\varepsilon_k(q) - z}. \tag{6}$$

Из интегрирования последнего равенства с весами 1 и $\cos q$ получаем:

$$\begin{pmatrix} z-\varepsilon(k) & -\gamma & 0 \\ \gamma A(k,z) & 1 & \lambda B(k,z) \\ \gamma B(k,z) & 0 & 1+\lambda C(k,z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Определитель матрицы равен (5). Обратно, всякий ненулевой вектор её ядра посредством (6) задаёт ненулевую собственную функцию: обе моментные связи выполняются в силу двух последних строк системы. □

Замечание 1. *Условие (5) применяется лишь вне* $[a(k), b(k)]$. *Пороговые собственные состояния или резонансы нельзя получить формальной подстановкой* $z = a(k)$ *либо* $z = b(k)$.

Вычисление резольвентных интегралов.

Лемма 1. *Пусть* $c > 0$, $z \in \mathbb{R}\backslash[a(k), b(k)]$ *и* $d = 2 - z$. *Обозначим* $S(k,z) = \frac{\operatorname{sgn}(d)}{\sqrt{d^2-4c^2}}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} A(k,z) &= S(k,z), \quad B(k,z) = \frac{dS(k,z)-1}{2c}, \\ C(k,z) &= \frac{d^2 S(k,z) - d}{4c^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Первое равенство следует из $\int_{\mathbb{T}} (d - 2c\cos q)^{-1}\, d\eta = \operatorname{sgn}(d)(d^2-4c^2)^{-1/2}$ при $|d| > 2c$. Для остальных достаточно проинтегрировать тождества $d/(d-2c\cos q) = 1 + 2c\cos q/(d-2c\cos q)$ и $dB = 2cC$, последнее из которых следует из $d\cos q/(d-2c\cos q) = \cos q + 2c\cos^2 q/(d-2c\cos q)$ и $\int_{\mathbb{T}} \cos q\, d\eta = 0$. □

В частности, $A(k,z) > 0$ при $z < a(k)$ и $A(k,z) < 0$ при $z > b(k)$.

Дискретный спектр и критерий существования.

Теорема 3. *Если* $\gamma = 0$ *и* $c > 0$, *то* $\varepsilon(k) < a(k)$ *является собственным значением* $H_{0,\lambda}(k)$ *с вектором* $(1,0)$. *Все другие собственные значения вне* $[a(k), b(k)]$ *в точности совпадают с решениями*

$$1 + \lambda C(k,z) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем $H_{0,\lambda}(k) = \varepsilon(k) \oplus H_\lambda(k)$. Для второго слагаемого из $(H_\lambda(k) - z)f = 0$ следует $f = -\lambda\langle f, v\rangle(M_k - z)^{-1}v$. Ненулевое решение возможно ровно при (8); при этом $f = (M_k - z)^{-1}v$ задаёт собственную функцию. Неравенство $\varepsilon(k) < a(k)$ непосредственно следует из (1). □

Пусть далее $\lambda \le 0$ и $z > b(k)$. Поскольку $C(k,z) < 0$, имеем $1 + \lambda C(k,z) \ge 1$. Определим

$$\begin{aligned} g_\lambda(k,z) &= A(k,z) - \frac{\lambda B(k,z)^2}{1+\lambda C(k,z)}, \\ F_{\gamma,\lambda}(k,z) &= z - \varepsilon(k) + \gamma^2 g_\lambda(k,z). \end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть* $c > 0$, $\lambda \le 0$ *и* $\gamma \ne 0$. *При* $z > b(k)$ *уравнение* (5) *эквивалентно* $F_{\gamma,\lambda}(k,z) = 0$. *Функция* $F_{\gamma,\lambda}(k,\cdot)$ *строго возрастает на* $(b(k), \infty)$; *следовательно, выше существенного спектра имеется не более одного собственного значения.*

Доказательство. Первое утверждение следует из $D_{\gamma,\lambda} = (1+\lambda C)F_{\gamma,\lambda}$. Так как $H_\lambda(k) = M_k + \lambda V \le M_k$, то $H_\lambda(k) - z < 0$ и резольвентная формула ранга один даёт

$$g_\lambda(k,z) = \langle (H_\lambda(k) - z)^{-1}\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle.$$

Дифференцируя резольвенту, находим:

$$\frac{\partial F_{\gamma,\lambda}}{\partial z} = 1 + \gamma^2 \parallel (H_\lambda(k) - z)^{-1}\mathbf{1} \parallel^2 > 0.$$

Это доказывает строгую монотонность и единственность возможного корня.

□

Следствие 1. *При условиях теоремы 4 предположим, что существует конечный предел* $L = \lim_{z \downarrow b(k)} F_{\gamma,\lambda}(k,z)$. *Тогда при* $L < 0$ *выше* $b(k)$ *существует ровно одно собственное значение, а при*

$L \geq 0$ собственных значений строго выше $b(k)$ нет. При $L = 0$ вопрос о пороговом состоянии этим критерием не решается.

Доказательство. При $z \to +\infty$ имеем $A = -z^{-1} + O(z^{-2})$, $B = O(z^{-2})$, $C = O(z^{-1})$; следовательно, $F_{\gamma,\lambda}(k,z) = z - \varepsilon(k) + O(z^{-1}) \to +\infty$. Остаётся применить непрерывность и строгую монотонность из теоремы 4. □

Теорема 5. *Если $c > 0$, $\lambda = 0$ и $\gamma \neq 0$, то $H_{\gamma,0}(k)$ имеет ровно одно собственное значение ниже $a(k)$ и ровно одно выше $b(k)$.*

Доказательство. Уравнение (5) сводится к $F_{\gamma,0}(k,z) = z - \varepsilon(k) + \gamma^2 A(k,z) = 0$. На каждой компоненте $\mathbb{R}\backslash[a(k), b(k)]$ производная $\partial_z F_{\gamma,0} = 1 + \gamma^2 \int_{\mathbb{T}} (\varepsilon_k(q) - z)^{-2}\, d\eta(q) > 0$. Из (7) следуют пределы $F(-\infty) = -\infty$, $F(a(k) - 0) = +\infty$, $F(b(k) + 0) = -\infty$, $F(+\infty) = +\infty$. Поэтому на каждом из двух промежутков имеется ровно один корень. □

Вырожденный квазиимпульс $k = \pm\pi$.

Теорема 6. *При $k = \pm\pi$ и любых $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}\left(H_{\gamma,\lambda}(k)\right) &= \{2\}, \\ \sigma\left(H_{\gamma,\lambda}(k)\right) &= \{2,\ -1 - \sqrt{9+\gamma^2},\ -1 + \sqrt{9+\gamma^2},\ 2 + \lambda/2\}. \end{aligned} \tag{10}$$

При совпадении значений повторения в множестве не учитываются. Если $\gamma \neq 0$, два собственных значения $-1 \pm \sqrt{9+\gamma^2}$ находятся по разные стороны точки 2.

Доказательство. При $c = 0$ имеем $M_k = 2I$, $\varepsilon(k) = -4$, $\langle \mathbf{1}, v \rangle = 0$ и $\| v \|^2 = 1/2$. В ортогональном разложении

$$\mathcal{H} = (\mathbb{C} \oplus \text{span}\{\mathbf{1}\}) \oplus \text{span}\{v\} \oplus \{\mathbf{1}, v\}^{\perp}$$

сужения оператора равны соответственно матрице $\begin{pmatrix} -4 & \gamma \\ \gamma & 2 \end{pmatrix}$, числу $2 + \lambda/2$ и оператору $2I$. Собственные значения матрицы равны $-1 \pm \sqrt{9+\gamma^2}$. Последнее подпространство бесконечномерно, что доказывает (10). При $\gamma \neq 0$ имеем $\sqrt{9+\gamma^2} > 3$. □

ЛИТЕРАТУРА:

1. Friedrichs K. O. On the perturbation of continuous spectra. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. P. 361–406.

2. Reed M., Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. IV: Analysis of Operators. Academic Press, 1978.

3. Lakaev S. N. Discrete spectrum of operator valued Friedrichs models. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 1986. Vol. 27, No. 2. P. 341–357.

4. Albeverio S., Lakaev S. N., Makarov K. A., Muminov Z. I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices. Communications in Mathematical Physics. 2006. Vol. 262. P. 91–115. DOI: 10.1007/s00220-005-1454-y.

5. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 330. P. 1152–1168. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.08.046.

6. Lakaev S. N., Latipov Sh. M. О существовании и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно-резонансной модели. Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 169, № 3. С. 341–351. DOI: 10.4213/tmf6734.

7. Lakaev S. N., et al. Threshold Effects for the Generalized Friedrichs Model with the Perturbation of Rank One. Abstract and Applied Analysis. 2012. Article ID 180953. DOI: 10.1155/2012/180953.

8. Kurbanov Sh. Kh., Abduvayitov S. S. The Discrete Spectrum of the Generalized Friedrichs Model with a Rank-Two Perturbation. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 46, No. 2. P. 713–723. DOI: 10.1134/S1995080225600177.

9. Lakaev S. N., Abduvayitov S. S., Lakaev S. S. Threshold States and Coupling-Constant Classification of Bound States for a Family of Finite-Rank Lattice Hamiltonians. Complex Analysis and Operator Theory. 2026. Vol. 20. Article 149. DOI: 10.1007/s11785-026-02001-8.