UO‘K 511.53

# BOSHQARUVLARI GRONUOLL CHEGARALANISHGA EGA CHIZIQLI DIFFERENSIAL O‘YINDA $\ell$ -TUTISH MASALASI

***Turg‘unboyeva Mohisanam Axmadullo qizi,***
*Namangan davlat universiteti*
*“Matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi, PhD*
*O‘zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti*
*Namangan bo‘linmasi katta ilmiy xodimi*
*turgunboyevamohisanam95@gmail.com*

***Annotatsiya.*** *Ushbu maqolada o‘yinchilarning harakati chiziqli differensial tenglamalar bilan tavsiflanadigan differensial o‘yinda $\ell$-tutish masalasi o‘rganiladi. Har ikkala o‘yinchining boshqaruv funksiyalari Gronuoll tipidagi turli chegaralanishlarni qanoatlantiruvchi o‘lchovli funksiyalar sinflaridan tanlanadi. Mazkur chegaralanishlar geometrik chegaralanishli quvish-qochish modellarini umumlashtirish imkonini beradi. Quvlovchining maqsadi qochuvchiga oldindan berilgan $\ell$ masofagacha yaqinlashishdan iborat. Tadqiqotda boshlang‘ich holatlar, harakat tenglamalari koeffitsiyentlari hamda boshqaruv chegaralanishlari parametrlarining $\ell$-tutish imkoniyatiga ta’siri tahlil qilinadi. Asosiy e’tibor masalaning yechiluvchanlik shartlarini aniqlash, quvlovchi uchun konstruktiv strategiya qurish, uning joizligini asoslash hamda qochuvchining ixtiyoriy joiz boshqaruvida $\ell$-tutishning kafolatlangan vaqtini baholashga qaratiladi. Tadqiqot quvish-qochish jarayonlarini o‘zgaruvchan boshqaruv imkoniyatlari sharoitida o‘rganishga yo‘naltirilgan.*

***Kalit so‘zlar:*** *differensial o‘yin, quvlovchi, qochuvchi, strategiya, kafolatlangan $\ell$-tutish vaqti.*

# THE $\ell$-CAPTURE PROBLEM IN A LINEAR DIFFERENTIAL GAME UNDER GRÖNWALL-TYPE CONSTRAINTS ON CONTROLS

***Abstract.*** *In this work, $\ell$-capture is studied in a differential game governed by linear differential equations. Both players select controls from classes of measurable functions satisfying different Grönwall-type constraints, which generalize pursuit-evasion models with geometric constraints. The pursuer aims to approach the evader within a prescribed distance $\ell$. The influence of initial states, equation coefficients, and constraint parameters on $\ell$-capture feasibility is analyzed. The study focuses on determining solvability conditions, developing a constructive strategy for the pursuer, establishing its admissibility, and estimating the guaranteed $\ell$-capture time against any admissible evader control. It examines pursuit-evasion processes under varying control capabilities.*

***Key words:*** *differential game, pursuer, evader, strategy, guaranteed $\ell$-capture time.*

# ЗАДАЧА $\ell$-ПОИМКИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА ГРОНУОЛЛА НА УПРАВЛЕНИЯ

***Аннотация.*** *В данной работе исследуется задача $\ell$-поимки в дифференциальной игре, в которой движение игроков описывается линейными дифференциальными уравнениями. Управления обоих игроков выбираются из классов измеримых функций, удовлетворяющих различным ограничениям типа Гронуолла. Эти ограничения обобщают модели преследования-убегания с геометрическими ограничениями. Цель преследователя — приблизиться к убегающему на расстояние, не превышающее $\ell$. Анализируется влияние начальных состояний, коэффициентов уравнений и параметров ограничений на возможность $\ell$-поимки. Основное внимание уделяется определению условий разрешимости, построению конструктивной стратегии преследователя, обоснованию её допустимости и оценке гарантированного времени $\ell$-поимки при любом допустимом управлении убегающего. Исследование направлено на изучение процессов преследования-убегания в условиях изменяющихся возможностей управления.*

***Ключевые слова:*** *дифференциальная игра, преследователь, убегающий, стратегия, гарантированное время $\ell$-поимка.*

**Kirish.** Differensial o‘yinlar nazariyasi manfaatlari o‘zaro zid bo‘lgan ishtirokchilar boshqaradigan dinamik jarayonlarni o‘rganishning matematik asosini tashkil etadi. Bunday jarayonlarda tizimning holati

differensial tenglamalar bilan tavsiflanadi va uning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi o‘yinchilarning boshqaruvlariga bog‘liq bo‘ladi. Har bir o‘yinchi o‘z maqsadiga erishish uchun tizimning harakat qonunlari, boshqaruv imkoniyatlari va raqibning mumkin bo‘lgan qarshi harakatlarini hisobga olishi lozim. Shu sababli nazariyaning asosiy vazifalaridan biri raqibning joiz qarshi harakatlariga qaramay maqsadga erishishni kafolatlaydigan strategiyalarni qurishdan iborat. Mazkur yondashuv robototexnika, uchish apparatlarini boshqarish va boshqa harakatni boshqarish masalalarida qo‘llaniladi.

Quvish–qochish masalalari differensial o‘yinlar nazariyasining muhim yo‘nalishlaridan biridir. Bunday o‘yinlarda quvlovchi qochuvchiga yaqinlashishga, qochuvchi esa belgilangan yaqinlashishning yuz berishiga yo‘l qo‘ymaslikka intiladi. Aniq tutish masalasida o‘yinchilarning holatlari biror chekli vaqtda ustma-ust tushishi talab etiladi. $\ell$-tutish masalasida esa ular orasidagi masofaning oldindan berilgan $\ell > 0$ sondan katta bo‘lmasligi yetarli hisoblanadi. Ushbu qo‘yilish maqsadga muayyan aniqlik bilan erishish yoki belgilangan ta’sir doirasiga kirish kabi vaziyatlarni matematik ifodalash imkonini beradi. Quvlovchi uchun bunday yaqinlashishni qochuvchining ixtiyoriy joiz boshqaruvida kafolatlash muhim bo‘lsa, qochuvchi yaqinlashishning oldini olishga yoki uning yuz berish vaqtini imkon qadar kechiktirishga harakat qiladi.

O‘yinning yechiluvchanligi o‘yinchilarning harakat qonunlari bilan bir qatorda ularning boshqaruvlariga qo‘yilgan chegaralanishlarga ham bog‘liq. Geometrik chegaralanishlar boshqaruvning har bir vaqt momentidagi kattaligini cheklaydi, integral chegaralanishlar esa ma’lum vaqt davomida sarflanadigan umumiy resursni, xususan, energiyani ifodalashga xizmat qiladi. Gronuoll tipidagi chegaralanishlarda boshqaruvning joriy kattaligi uning avvalgi vaqt oralig‘idagi qiymatlariga bog‘liq integral orqali chegaralanadi. Bu boshqaruv imkoniyatlarining vaqt davomida o‘zgarishini hisobga olishga imkon beradi. Mazkur chegaralanishlarning standart ko‘rinishida integral had oldidagi koeffitsiyent nolga teng bo‘lganda geometrik chegaralanishlar hosil bo‘ladi. Shu ma’noda Gronuoll tipidagi chegaralanishlar geometrik chegaralanishlarni umumlashtiradi. Bunday chegaralanishlar ostida sodda harakatli o‘yinlar uchun aniq tutish, qochish va optimal strategiyalarni qurish masalalari o‘rganilgan.

**Adabiyotlar tahlili.** R. Ayzeksning [1] monografiyasida differensial o‘yinlar nazariyasining asosiy masalalari, jumladan quvish–qochish o‘yinlari bayon etilgan. L.S. Pontryagin [2] chiziqli differensial o‘yinlarda quvish va qochish masalalarini yechish usullarini rivojlantirgan. N.N. Krasovskiy [3] ishlarida esa chiziqli tizimlarda harakatni boshqarishning nazariy asoslari o‘rganilgan.

Boshqaruvlari Gronuoll tipidagi chegaralanishlarga ega sodda harakatli o‘yinlarda quvish–qochish masalalari [4-6] ishlarda tadqiq etilgan. Ularda parallel quvish strategiyasi qurilib, tutish va qochishning yechiluvchanlik shartlari hamda tutish vaqti aniqlangan. Chiziqli dinamika va Gronuoll chegaralanishlari ostida quvish strategiyasini qurish masalasi [6] da ko‘rib chiqilgan. Mazkur natijalar Gronuoll chegaralanishli o‘yinlarda quvlovchining boshqaruvini konstruktiv tanlash uchun usuliy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Integral chegaralanishlar ostida $\ell$-tutish masalasi [7,8,10] da, nostatsionar geometrik chegaralanishli inersion model uchun esa [8] da o‘rganilgan. A.A. Azamov va B.T. Samatovning [9] ishida parallel quvish strategiyasining turli boshqaruv sinflariga tatbiqi yoritilgan. A.A. Chikriining [10] monografiyasida esa hal qiluvchi funksiyalar usuli va uning quvish masalalarini yechishdagi qo‘llanishlari bayon etilgan. Ushbu yondashuvlar yaqinlashish strategiyalarini qurish va kafolatlangan tutish vaqtini baholashda muhim ahamiyatga ega.

Yuqoridagi tadqiqotlarga tayangan holda, ushbu ishda harakati birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar bilan tavsiflanadigan, boshqaruvlari esa Gronuoll tipidagi turli chegaralanishlarni qanoatlantiradigan ikki o‘yinchili differensial o‘yinda $\ell$-tutish masalasi o‘rganiladi. Quvlovchining maqsadi qochuvchining ixtiyoriy joiz boshqaruvida biror chekli vaqtda ular orasidagi masofa oldindan berilgan $\ell > 0$ qiymatdan katta bo‘lmasligini ta’minlashdan iborat. Tadqiqotda quvlovchi uchun konstruktiv strategiya qurish, uning joizligini asoslash, $\ell$-tutishning yechiluvchanlik shartlarini aniqlash va kafolatlangan vaqtini baholashga asosiy e’tibor qaratiladi.

**Tadqiqot metodologiyasi.** Tadqiqot chiziqli differensial tenglamalar nazariyasi, Gronuoll tengsizligi va konstruktiv quvish usullariga asoslanadi. O‘yinchilarning harakat tenglamalari $z(t) = x(t) - y(t)$ almashtirish yordamida nisbiy harakatning $\dot{z} + az = u - v$ tenglamasiga keltiriladi. Integrallovchi ko‘paytuvchi usuli orqali ushbu tenglamaning yechimi integral ko‘rinishda ifodalanadi. Bu boshlang‘ich holatlar va boshqaruvlarning o‘yinchilar orasidagi masofaga ta’sirini tahlil qilish imkonini beradi.

Gronuoll tengsizligi yordamida joiz boshqaruvlarning vaqtga bog‘liq yuqori baholari aniqlanadi. Quvlovchining yaqinlashish strategiyasini qurishda parallel quvish yondashuvi va hal qiluvchi funksiyalar usulidan foydalaniladi [8,9]. Qurilgan strategiyaning joizligini asoslash uchun uning o‘lchovliligi hamda dastlabki Gronuoll chegaralanishlarini qanoatlantirishi tekshiriladi.

Nisbiy trayektoriyani baholashda integral tengsizliklar va skalyar baholashlardan foydalaniladi. Olingan baholar asosida biror chekli vaqtda $|z(t)| \le \ell$ munosabatning bajarilishini kafolatlaydigan shartlar aniqlanadi hamda $\ell$-tutish vaqti baholanadi. Bunda boshlang‘ich masofa, chiziqli dinamika koeffitsiyenti va boshqaruv chegaralanishlari parametrlari hisobga olinadi.

**Masalaning qo‘yilishi.** Biz ushbu ishda $\mathbb{R}^n$ Yevklid fazosida ikki o‘yinchilik sodda harakatli differensial o‘yinda $\ell$-tutish masalasini ko‘rib chiqamiz. Odatda differensial o‘yinlarda birinchi o‘yinchini *quvlovchi*, ikkinchi o‘yinchini esa *qochuvchi* deb ataladi. $\mathbb{R}^n$ fazoda quvlovchining holat vektorini $x$, qochuvchinikini esa $y$ bilan belgilaylik. U holda o‘yinchilarning harakat dinamikalari ushbu differensial tenglamalar orqali ifodalanadi:

$$\dot{x} + ax = u, \quad x(0) = x_0, \quad a > 0 \tag{1}$$

$$\dot{y} + ay = v, \quad y(0) = y_0, \quad a > 0. \tag{2}$$

(1) va (2) da, o‘yinchilarning boshlang‘ich holat vektorlari sifatida $x_0$ va $y_0$ vektorlar qaralib, o‘yin avvalida ular orasidagi masofa biror $\ell > 0$ sondan katta deb faraz qilinadi, ya’ni $|x_0 - y_0| > \ell$. Tezlik vektorlari $u$ hamda $v$ mos ravishda o‘yinchilarning boshqaruv parametrlari deyiladi.

**1-Ta’rif.** $u(\cdot) = \left(u_1(\cdot), u_2(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)\right)$ boshqaruv funksiyasi *quvlovchining joiz boshqaruvi* deyiladi, agar bu boshqaruv $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathrm{R}^n$ akslantirishni qanoatlantiruvchi o‘lchovli funksiyalar sifatida tanlanib, deyarli barcha $t \ge 0$ da ushbu tengsizlikni

$$|u(t)|^2 \le \alpha^2 + 2c\int_0^t |u(s)|^2 ds \tag{3}$$

qanoatlantirsa, bu yerda $\alpha > 0$, $c \ge 0$ sonlar oldindan berilgan parametrlar.

**2-Ta’rif.** $v(\cdot) = \left(v_1(\cdot), v_2(\cdot), \ldots, v_n(\cdot)\right)$ boshqaruv funksiyasi *qochuvchining joiz boshqaruvi* deyiladi, agar bu boshqaruv $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathrm{R}^n$ akslantirishni qanoatlantiruvchi o‘lchovli funksiyalar sifatida tanlanib, deyarli barcha $t \ge 0$ da ushbu tengsizlikni

$$|v(t)|^2 \le \beta^2 + 2c\int_0^t |v(s)|^2 ds \tag{4}$$

qanoatlantirsa, bu yerda $\beta > 0$, $c \ge 0$ sonlar oldindan berilgan parametrlar.

(3) va (4) tengsizliklar o‘yinlar nazariyasida yangi turdagi chegaralanishlardan biri bo‘lib, bunday cheklovlar *Gronuoll tipidagi chegaralanishlar* deb yuritiladi.

Yuqoridagi ta’riflarda $|\cdot|$ belgisi $\mathbb{R}^n$ fazodagi odatiy Yevklid normasini bildiradi. Ushbu norma quyidagicha aniqlanadi:

$$|u(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(t)}, \quad |v(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2(t)},$$

bu yerda $u_i(t)$ va $v_i(t)$ mos ravishda $u(t)$ va $v(t)$ vektorlarning komponentalaridir.

Quvlovchining barcha joiz boshqaruvlari to‘plamini $\mathrm{U}_{Gr}$ bilan belgilaymiz. Xuddi shuningdek, $\mathrm{V}_{Gr}$ qochuvchining barcha joiz boshqaruvlari to‘plamini bildiradi.

Agar $u(\cdot) \in \mathrm{U}_{Gr}$ va $v(\cdot) \in \mathrm{V}_{Gr}$ bo‘lsa, u holda (1) va (2) tenglamalardan har bir $(x_0, u(\cdot))$ va $(y_0, v(\cdot))$ juftliklar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining

$$x(t) = e^{-at}\left(x_0 + \int_0^t e^{as}u(s)ds\right), \qquad y(t) = e^{-at}\left(y_0 + \int_0^t e^{as}v(s)ds\right)$$

trayektoriyalarini ifodalaydi.

Quvlovchining asosiy maqsadi qochuvchiga oldindan berilgan $\ell > 0$ masofagacha yaqinlashishdan ($\ell$-tutish masalasi, [7,8,10]), ya’ni biror chekli $t_\ell \ge 0$ vaqtda

$$|x(t_\ell) - y(t_\ell)| \le \ell$$

munosabatni ta'minlashdan iborat. Qochuvchining maqsadi esa quvlovchining o'ziga $\ell > 0$ masofagacha yaqinlashishiga yo'l qo'ymaslik, ya'ni barcha $t \geq 0$ uchun $|x(t)-y(t)| > \ell$ shartning bajarilishini ta'minlashdan iborat. Agar buning imkoni bo'lmasa, qochuvchi $\ell$-tutish yuz beradigan vaqtni imkon qadar kechiktirishga intiladi.

Shu o'rinda ta'kidlash joizki, (1)-(4) o'yinda aniq tutish masalasining yechiluvchanlik shartlari Samatov B.T., Ibragimov G'.I. va boshqalarning ishlarida aniqlangan bo'lib ($\ell = 0$ holda) [4-6], biz bu ishda $\ell$ masofaga yaqinlashish masalasining yechiluvchanlik shartlarini aniqlaymiz ($\ell > 0$ holda).

(1) va (2) tenglamalarni $z = x - y$ belgilashga ko'ra quyidagicha qayta yozaylik:

$$\dot{z} + az = u - v, \quad z(0) = z_0, \tag{5}$$

bu yerda $z_0 = x_0 - y_0$.

Agar $u(\cdot) \in \mathrm{U}_{Gr}$ va $v(\cdot) \in \mathrm{V}_{Gr}$ bo'lsa, u holda (5) boshlang'ich shartli masalaning $z(t)$ yechimi quyidagi ko'rinishda topiladi:

$$z(t) = e^{-at}\left(z_0 + \int_0^t e^{as}\big(u(s) - v(s)\big)ds\right). \tag{6}$$

Quyidagi Gronuoll tengsizligi $\ell$-tutish masalalarini yechishda asosiy vosita sifatida qo'llaniladi.

**1-Lemma.** Agar $|g(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k\int_0^t |g(s)|^2\, ds$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $|g(t)| \leq \rho e^{kt}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $g(t)$ barcha $t \geq 0$ larda o'lchovli funksiya, $\rho$, $k$ esa nomanfiy sonlardir.

1-Lemmaga ko'ra, agar $u(\cdot) \in \mathrm{U}_{Gr}$ va $v(\cdot) \in \mathrm{V}_{Gr}$ bo'lsa, qaralayotgan differensial o'yinda barcha $t \geq 0$ uchun quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi:

$$|u(t)| \leq \alpha e^{ct}, \quad |v(t)| \leq \beta e^{ct}. \tag{7}$$

Albatta, teskari tasdiq o'rinli emasligini osongina tekshirish mumkin, ya'ni (7) tengsizliklarning bajarilishidan (3) va (4) tengsizliklarning bajarilishi har doim ham kelib chiqmaydi.

**3-Ta'rif:** Markazi $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^n$ nuqtada va radiusi R bo'lgan sharni $\mathrm{B}(\mathrm{C};\mathrm{R})$ bilan belgilaymiz. Agar $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \times \mathrm{B}(0;\beta e^{ct}) \to \mathrm{B}(0;\alpha e^{ct})$ boshqaruv funksiyasi har bir tayinlangan $v$ uchun $t$ bo'yicha Lebeg ma'nosida o'lchovli va har bir tayinlangan $t$ uchun $v$ bo'yicha Borel ma'nosida o'lchovli bo'lsa, u *quvlovchining strategiyasi* deyiladi. Bu yerda $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Faraz qilaylik,

$$\gamma(t,v) = \frac{1}{h}\left[\langle z_0, v\rangle + \alpha e^{ct}\ell + \sqrt{\big(\langle z_0, v\rangle + \alpha e^{ct}\ell\big)^2 + \big(\alpha^2 e^{ct} - |v|^2\big)h}\right],$$

$$\mu(t,v) = -\frac{v - \gamma(t,v)z_0}{|v - \gamma(t,v)z_0|}\ell, \text{ va } h = |z_0|^2 - \ell^2 \text{ bo'lsin. Bu yerda } \langle z_0, v\rangle \text{ - } \mathbb{R}^n \text{ fazoda } z_0 \text{ va } v$$

vektorlar orasidagi skalyar ko'paytmani ifodalaydi.

Shuni ta'kidlash joizki, $\gamma(t,v)$ funksiya quvish o'yinlarida hal qiluvchi funksiya deb ataladi.

**4-Ta'rif.** Agar $\alpha > \beta$ bo'lsa, u holda ushbu

$$\mathbf{u}(t,v) = v + \gamma(t,v)\big(\mu(t,v) - z_0\big) \tag{8}$$

boshqaruv funksiyasi $\ell$-tutish o'yinida *quvlovchining yaqinlashish strategiyasi* (yoki qisqacha $\Pi_\ell$-strategiyasi) deyiladi.

$\Pi_\ell$-strategiyani klassik $\Pi$-strategiyaning umumlashmasi deb qarash mumkin. $\ell = 0$ bo'lganda, $\ell$-tutish masalasi klassik quvish masalasiga keladi. [8-9] ishlarda quvlovchining barcha joiz strategiyalari orasida $\Pi$-strategiya qochuvchiga optimal yaqinlashishni ta'minlashi va mumkin bo'lgan eng qisqa chekli vaqtda aniq tutishni kafolatlashi isbotlangan. Demak, $\ell = 0$ holida 3-Ta'rif aynan klassik $\Pi$-strategiyani beradi.

**1-Tasdiq:** $\alpha > \beta$ bo'lsin, u holda qochuvchining ixtiyoriy $v$, $|v| \leq \beta e^{ct}$, joiz boshqaruvi uchun

(a) $\gamma(t,v)$ hal qiluvchi funksiya aniqlangan, uzluksiz va nomanfiy;

(b) $\left(\alpha e^{ct} - \beta e^{ct}\right) / \left(|z_0| - \ell\right) \le \gamma(t,v) \le \left(\alpha e^{ct} + \beta e^{ct}\right) / \left(|z_0| - \ell\right)$ tengsizlik o‘rinli;

(c) $|\mathbf{u}(t,v)| = \alpha e^{ct}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

**5-Ta’rif:** (1)–(4) o‘yinda quvlovchining (8) $\Pi_\ell$-strategiyasi $[0,T_{Gr}]$ vaqt intervalida $\ell$-tutishning bajarilishini kafolatlaydi deyiladi, agar qochuvchining ixtiyoriy $v(\cdot) \in V_{Gr}$ joiz boshqaruvi uchun

(a) $\mathbf{u}(t,v)$ boshqaruv funksiyasi barcha $t \in [0,T_{Gr}]$ lar uchun $U_{Gr}$ sinfga tegishli bo‘lsa;

(b) Shunday $t_\ell \in [0,T_{Gr}]$ vaqt mavjud bo‘lsaki,

$$\dot{z} + az = \mathbf{u}(t,v(t)) - v(t), \qquad z(0) = z_0 \tag{9}$$

Koshi masalasining yechimi $z(t)$ uchun $|z(t_\ell)| \le \ell$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa.

$T_{Gr}$ qiymat $\ell$-tutishning kafolatlangan vaqti deyiladi.

**1-Teorema.** Agar $\alpha > \beta$ bo‘lsa, u holda (1)–(4) o‘yinda quvlovchining (8) $\Pi_\ell$-strategiyasi $[0,T_{Gr}]$ vaqt intervalida $\ell$-tutishning bajarilishini kafolatlaydi, bu yerda

$$T_{Gr} = \begin{cases} \dfrac{1}{a+c}\ln\left(1 + \dfrac{\left(|z_0| - \ell\right)\left(a+c\right)}{\alpha - \beta}\right), & \text{agar} \quad c > 0, \\ \dfrac{1}{a}\ln\left(1 + \dfrac{\left(|z_0| - \ell\right)a}{\alpha - \beta}\right), & \text{agar} \quad c = 0. \end{cases}$$

*Isbot.* Faraz qilaylik, qochuvchi ixtiyoriy $v(\cdot) \in V_{Gr}$ joiz boshqaruv tanlasin, quvlovchi esa (8) orqali aniqlangan $\Pi_\ell$-strategiyani qo‘llasin. U holda (6) ga ko‘ra, (9) Koshi masalasining yechimini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$z(t) = e^{-at}\left(z_0 + \int_0^t e^{as}\gamma(s,v(s))\left(\mu(s,v(s)) - z_0\right)ds\right) =$$

$$= e^{-at}\left[z_0\left(1 - \int_0^t e^{as}\gamma(s,v(s))ds\right) + \int_0^t e^{as}\gamma(s,v(s))\mu(s,v(s))ds\right].$$

Ushbu tenglikdan, 1-tasdiqning *(b)* bandidan hamda minimum–maksimum haqidagi lemmadan foydalanib, quyidagi baholashlarni hosil qilamiz:

$$|z(t)|e^{at} \le |z_0|\left(1 - \int_0^t e^{as}\gamma(s,v(s))ds\right) + \ell\int_0^t e^{as}\gamma(s,v(s))ds =$$

$$= \left(|z_0| - \ell\right)\left(1 - \int_0^t e^{as}\gamma(s,v(s))ds\right) + \ell \le$$

$$\le \left(|z_0| - \ell\right)\left(1 - \min_{v(\cdot)\in V_{Gr}}\int_0^t e^{as}\gamma(s,v(s))ds\right) + \ell =$$

$$= \left(|z_0| - \ell\right)\left(1 - \frac{\alpha - \beta}{|z_0| - \ell}\int_0^t e^{(a+c)s}ds\right) + \ell = \Gamma(t) + \ell,$$

bu yerda, $\Gamma(t) = |z_0| - \ell + \dfrac{\alpha - \beta}{a+c}\left(1 - e^{(a+c)t}\right)$.

Endi $\Gamma(t)$ funksiya uchun quyidagicha tahlillarni ko‘raylik:

1. $t = 0$ vaqtda $\Gamma(0) = |z_0| - \ell$ bo‘ladi;

2. $\Gamma(t)$ funksiyaning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi uchun $\Gamma'(t) = -(\alpha - \beta)e^{(a+c)t}$ tengsizlik o‘rinli;

3. $t \to +\infty$ da $\lim_{t\to\infty} \Gamma(t) = -\infty$.

Yuqoridagilardan xulosa qiladigan bo‘lsak, shunday vaqt mavjudki $\Gamma(T_{Gr}) = 0$ bo‘ladigan. U holda $t = T_{Gr}$ vaqtda $|z(T_{Gr})| \le \ell e^{-aT_{Gr}} \le \ell$ tengsizlikga kelamiz. Ko‘rinib turibdiki, $[0, T_{Gr}]$ vaqt intervalida quvlovchining $\Pi_\ell$-strategiyasi yutuqli bo‘ladi.

Shu o‘rinda ko‘rsatish kerakki, biz quvlovchiga taklif qilayotgan strategiya joiz strategiya bo‘lishini:

$$|\mathbf{u}(t, v(t))|^2 = \alpha^2 + \alpha^2(e^{2ct} - 1) = \alpha^2 + 2c\int_0^t \alpha^2 e^{2cs} ds = \alpha^2 + 2c\int_0^t |\mathbf{u}(s, v(s))|^2 ds.$$

Oxirgi tenglik ko‘rsatadiki (8) strategiya joiz bo‘ladi. Teorema isbotlandi. ■

**Xulosa.** Ushbu ishda boshqaruvlari Gronuoll tipidagi turli chegaralanishlarni qanoatlantiradigan chiziqli differensial o‘yinda $\ell$-tutish masalasi o‘rganildi. Asosiy e’tibor quvlovchi uchun joiz yaqinlashish strategiyasini qurish, masalaning yechiluvchanlik shartlarini aniqlash va $\ell$-tutishning kafolatlangan vaqtini baholashga qaratildi. Bunda boshlang‘ich holatlar, chiziqli dinamika koeffitsiyenti hamda boshqaruv chegaralanishlari parametrlarining yaqinlashish imkoniyatiga ta’siri hisobga olindi. Qaralayotgan model $a = 0$ bo‘lganda sodda harakatli differensial o‘yinga, $\ell = 0$ bo‘lganda esa aniq tutish masalasiga keladi. Mazkur qo‘yilish Gronuoll chegaralanishlari ostidagi yaqinlashish masalalarini holatga bog‘liq chiziqli dinamika mavjud bo‘lgan tizimlar uchun tadqiq etish imkonini beradi.

### *ADABIYOTLAR:*


*1. Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. – New York: John Wiley & Sons, 1965. – 384 p.*

*2. Pontryagin L.S. Selected Works. – Moscow: MAKS Press, 2004. – 551 p. (in Russian).*

*3. Krasovskii N.N. Theory of Control of Motion: Linear Systems. – Moscow: Nauka, 1968. – 476 p. (in Russian).*

*4. Samatov B.T., Ibragimov G.I., Khodjibayeva I.V. Pursuit-Evasion Differential Games with Grönwall-Type Constraints on Controls // Ural Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 6, No. 2. – pp. 95–107.*

*5. Samatov B.T., Akbarov A.Kh., Zhuraev B.I. Pursuit–Evasion Differential Games with Gr-Constraints on Controls // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. – 2022. – Vol. 59. – pp. 67–84.*

*6. Samatov B.T., Soyibboev U.B., Akbarov A.Kh. A Linear Differential Game with Gronwall Type Constraint // Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research. – 2020. – Vol. 2, No. 2. – pp. 17–26.*

*7. Samatov B.T. Problems of Group Pursuit with Integral Constraints on Controls of the Players. I // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – Vol. 49, No. 5. – pp. 756–767.*

*8. Turgunboeva M.A. On ℓ-Catch Problem in Differential Games with Inertial Players and Non-Stationary Geometric Constraints on Controls // Uzbek Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 69, No. 1. – pp. 171–178.*

*9. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Applications // Contributions to Game Theory and Management. – 2011. – Vol. 4. – pp. 33–46.*

*10. Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 404 p.*