УДК 517.957

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РАСШИРЕННОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ С ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хоитметов Умид Азадович,
профессор кафедры Прикладной математики и математической физики Ургенчского государственного университета имени Абу Рейхана Беруни, доктор физико-математических наук
x.umid@urdu.uz
Мусаева Феруза Камоладдин кизи,
стажёр-преподаватель кафедры Прикладной математики и математической физики Ургенчского государственного университета имени Абу Рейхана Беруни
musayevaferuza595@gmail.com

Аннотация. *В данной работе исследуется расширенное уравнение Хироты с самосогласованным источником (включая дополнительные члены более низкого порядка). В частности, изучается интегрируемость расширенного уравнения Хироты с самосогласованным источником в классе быстро убывающих функций. Также получена эволюция данных рассеяния для оператора Дирака, потенциал которого является решением задачи Коши для этого уравнения в классе быстро убывающих функций.*

Ключевые слова*: расширенное уравнение Хироты с источником, оператор Дирака, решения Йоста, данные рассеяния, интегральное уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко.*

TEZ KAMAYUVCHI FUNKSIYALAR SINFIDA MOSLANGAN MANBALI YUKLANGAN HADLI HIROTA TENGLAMASI UCHUN QO‘YILGAN KOSHI MASALASINI YECHISH

Annotatsiya*. Mazkur maqolada tez kamayuvchi funksiyalar sinfida moslangan manbali yuklangan hadga ega Hirota tenglamasi uchun Koshi masalasi o‘rganiladi. Xususan, ushbu tenglamaning integrallanuvchanlik xossalari tahlil qilinadi hamda uning yechimlarini qurish masalasi qaraladi. Shuningdek, potensiali mazkur Koshi masalasining yechimi bo‘lgan Dirak operatorining sochilish nazariyasi evolyutsiyasi aniqlanadi. Olingan natijalar teskari sochilish usuli yordamida Hirota tipidagi nochiziqli evolyutsion tenglamalarni tadqiq etishda muhim ahamiyatga ega.*

Kalit so‘zlar*: moslangan manbali yuklangan hadga ega Hirota tenglamasi, Dirak operatori, Yost yechimlari, sochilish nazariyasi, Gelfand–Levitan–Marchenko integral tenglamasi, Koshi masalasi, tez kamayuvchi funksiyalar.*

ON SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EXTENDED LOADED HIROTA EQUATION WITH A SOURCE IN THE CLASS OF RAPIDLY DECREASING FUNCTIONS

Abstract. *In this paper, we study the extended (including additional lower-order terms) Hirota equation with a self-consistent source. Specifically, we investigate the integrability of the extended Hirota equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing functions. We also obtain the evolution of the scattering data for the Dirac operator, whose potential is a solution to the Cauchy problem for this equation in the class of rapidly decreasing functions.*

Keywords: *extended Hirota equation with source, Dirac operator, Jost solutions, scattering data, Gelfand-Levitan-Marchenko integral equation.*

Введение. Интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения – ключевой объект современной математической физики, благодаря алгебраической структуре и широкому применению в нелинейной оптике, физике плазмы, гидродинамике, физике конденсированных сред и теории бозе-конденсатов. Их фундаментальная черта – бесконечное число законов сохранения, представления

Лакса и точные аналитические решения (солитоны, бризеры, рациональные решения типа «волны-убийцы»).

Яркий пример интегрируемой системы – нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), впервые изученное Захаровым и Шабатом. НУШ – универсальная модель эволюции медленно меняющихся огибающих в слабо нелинейных дисперсионных средах. Его солитоны наблюдались экспериментально, в частности, в оптических волокнах. Однако стандартное НУШ не описывает сверхкороткие или высокоинтенсивные импульсы, где значимы эффекты высшего порядка. Для этого предложены обобщения, важнейшее интегрируемое – уравнение Хироты. Хирота рассмотрел уравнение:

$$iu_t + 3i\zeta\,|u|^2 u_x + \rho u_{xx} + i\mu u_{xxx} + \eta\,|u|^2 u = 0, \tag{0.1}$$

и билинейным формализмом получил явные солитонные и многосолитонные решения. При $\zeta = 2\beta$, $\rho = \alpha$, $\mu = \beta$, $\eta = 2\alpha$ уравнение (0.1) переходит в

$$iu_t + \alpha(u_{xx} + 2|u|^2 u) + i\beta(u_{xxx} + 6|u|^2 u_x) = 0. \tag{0.2}$$

В частности, когда $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, уравнение (0.2) упрощается до уравнения НУШ, а при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ оно сводится к комплексному модифицированному уравнению Кортевега-де Фриза (кмКдФ).

А.М. Нахушев в своих трудах предложил всестороннее определение нагруженных уравнений и подробную классификацию их разновидностей, включая нагруженные дифференциальные, интегральные, интегро-дифференциальные и функциональные уравнения.

В данной работе мы рассматриваем следующее расширенное нагруженное уравнение Хироты с самосогласованным источником:

$$\begin{aligned} iu_t + P_0(|u(x_0,t)|)(u_{xx} + 2u|u|^2) + iP_1(|u(x_1,t)|)(6|u|^2 u_x + u_{xxx}) + iP_2(|u(x_2,t)|)u_x \\ + P_3(|u(x_3,t)|)u = 2i\sum_{k=1}^{N} Q_k(|u(x_0,t)|)(\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^{*2}) \end{aligned} \tag{0.3}$$

где $L(t)\Phi_k = \lambda_k \Phi_k$, $k = 1,2,\ldots,N$, $x \in \mathbb{R}$, $P_i(|u(x_i,t)|), i = \overline{0,3}$ и $Q_k(|u(x_0,t)|), k = \overline{1,N}$ — действительные непрерывные функции. Для каждого k функция $\Phi_k = \left(\Phi_{k1}(x,t), \Phi_{k2}(x,t)\right)^T$ представляет собой собственную вектор-функцию оператора:

$$L(t) = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u^*(x,t) & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

отвечающую собственному значению λ_k. Для определённости предположим, что сумма в правой части уравнения (0.3) изначально включает только те члены, для которых $\mathrm{Im}\lambda_k > 0$, причём $k = 1,2,\ldots,N$. Мы также накладываем условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k1}\Phi_{k2}\,dx, \quad k = 1,2,\ldots,N, \tag{0.4}$$

где $A_k(t)$ — заданные ненулевые функции, удовлетворяющие следующему равенству:

$$A_k(t) = A_n(t), \quad \lambda_k = \lambda_n, \quad k = 1,2,\ldots,N.$$

Для уравнения (0.3) задаётся начальное условие:

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{0.5}$$

где функция $u_0(x)$, определена для всех $x \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет следующим требованиям:

1) $$e^{\lambda|x|}u_0(x) \le \frac{C}{(1+|x|)^{1+\delta}}, \ \delta > 0; \tag{0.6}$$

2) оператор $L(0) = L(t)\big|_{t=0}$ имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_{2N}(0)$ и не обладает спектральными особенностями.

Предположим, что функция $u(x,t)$ достаточно гладкая и достаточно быстро убывает при $x \to \pm\infty$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left((1+|x|)|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty, \ k = 1,2,3. \tag{0.7}$$

Необходимые сведения. Рассмотрим следующую систему уравнений Дирака:

$$\begin{cases} y_{1x} + i\lambda y_1 = u(x) y_2, \\ y_{2x} - i\lambda y_2 = -u^*(x) y_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

определённую на всей вещественной прямой, где потенциал $u_0(x)$ удовлетворяет условию (0.6). Легко убедиться, что при введении оператора L и вектор-функции $y = (y_1, y_2)^T$ система (1.1) эквивалентна операторному уравнению $Ly = \lambda y$. Система (1.1) допускает решения Йоста со следующим асимптотическим поведением при $x \to -\infty$:

$$\varphi(x,\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, \ (\mathrm{Im}\lambda > -\varepsilon/2); \qquad \bar{\varphi}(x,\lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, \ (\mathrm{Im}\lambda < \varepsilon/2). \tag{1.2}$$

Здесь символ «черта» не обозначает комплексное сопряжение, вместо него для этой цели используется звездочка (*). При действительном λ каждая из пар $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$ и $\{\psi, \bar{\psi}\}$ образует множество линейно независимых решений системы (1.1). Следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$\varphi = a(\lambda)\bar{\psi} + b(\lambda)\psi, \qquad \bar{\varphi} = -a^*(\lambda^*)\psi + b^*(\lambda^*)\bar{\psi}, \tag{1.3}$$

где $a(\lambda) = W\{\varphi, \psi\} = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$, $b(\lambda) = W\{\bar{\psi}, \varphi\}$. Функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ удовлетворяют условию унитарности:

$$a(\lambda)a^*(\lambda^*) + b(\lambda)b^*(\lambda^*) = 1.$$

Функция $a(\lambda)$, первоначально определённая в полосе $|\mathrm{Im}\lambda| < \varepsilon/2$, допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Im}\lambda > -\varepsilon/2$ и удовлетворяет асимптотическому соотношению:

$$a(\lambda) = 1 + O(|\lambda|^{-1}), \quad |\lambda| \to \infty,$$

равномерно в любой полосе $\mathrm{Im}\lambda \geq \eta$ с $\eta > -\varepsilon/2$. В этой постановке функция $a(\lambda)$ может иметь лишь конечное число нулей $\lambda_k, k = \overline{1,N}$ в верхней полуплоскости, которые соответствуют собственным значениям оператора L в этой полуплоскости. Собственные значения оператора L в нижней полуплоскости совпадают с нулями функции $a^*(\lambda^*)$. В этих точках выполняются следующие соотношения:

$$\varphi(x,\lambda_k) = C_k\psi(x,\lambda_k), \quad \bar{\varphi}(x,\lambda_k) = \bar{C}_k\bar{\psi}(x,\bar{\lambda}_k), \quad k = \overline{1,N},$$

где $\bar{\lambda}_k = \lambda_k^*, \bar{C}_k = C_k^*$. Функции $\psi(x,\lambda)$ и $\bar{\psi}(x,\lambda)$ допускают следующие интегральные представления:

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,s)e^{i\lambda s}ds, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty \bar{K}(x,s)e^{-i\lambda s}ds \tag{1.4}$$

где $K(x,s) = \left(K_1(x,s), K_2(x,s)\right)^T$ и $\bar{K}(x,s) = \left(\bar{K}_1(x,s), \bar{K}_2(x,s)\right)^T$.

В представлении (1.4) ядро $K(x,s)$ не зависит от λ, а потенциал $u(x)$ восстанавливается из ядра как

$$u(x) = -2K_1(x,x). \tag{1.5}$$

Ядра $K(x,y)$ и $\bar{K}(x,y)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко:

$$\begin{aligned} \bar{K}(x,y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(x+y) + \int_x^\infty K(x,s)F(s+y)ds = 0, \\ K(x,y) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{F}(x+y) - \int_x^\infty \bar{K}(x,y)\bar{F}(s+y)ds = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где функции $F(x)$ и $\bar{F}(x)$ определены следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda - i\sum_{j=1}^{N} C_j e^{i\lambda_j x}, \quad \bar{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^*(\lambda^*)}{a(\lambda)} e^{-i\lambda x} d\lambda + i\sum_{j=1}^{N} C_j e^{-i\lambda_j x}. \tag{1.7}$$

Определение 1.1. Множество $\left\{r^+(\lambda)=b(\lambda)\left(a(\lambda)\right)^{-1},\ \lambda_k, C_k, k=\overline{1,N}\right\}$ называется данными рассеяния для системы уравнений (1.1).

Определение 1.2. Назовём функцию $r^+(\lambda)$ функцией типа (S) в полосе $(|\operatorname{Im}\lambda|<\varepsilon/2)$, если выполнены следующие условия:

1. $r^+(\lambda)$ мероморфна в указанной полосе, и для любого $\eta<\varepsilon/2$ имеет место асимптотика

$$r^+(\lambda)=O\left(\lambda^{-1}\right),\quad (|\lambda|\to\infty),$$

равномерная при $|\operatorname{Im}\lambda|\le\eta$.

2. В полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<\varepsilon/2$ функция $r^+(\lambda)$ не имеет полюсов на вещественной оси и удовлетворяет условию:

$$1+r^+(\lambda)r^*(\lambda^*)\neq 0,$$

где и $r^*(\lambda^*)=\dfrac{b^*(\lambda^*)}{a^*(\lambda^*)}$.

Отметим, что вектор-функции:

$$h_n(x)=\frac{\dfrac{d}{d\lambda}\left(\varphi-C_n\psi\right)|_{\lambda=\lambda_n}}{\dot a(\lambda_n)},\quad n=\overline{1,N},\tag{1.10}$$

удовлетворяют уравнению $Lh_n=\lambda_n h_n$. Кроме того, эти функции имеют следующие асимптотические формы:

$$h_n\sim -C_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda_n x},\quad x\to-\infty;\qquad h_n\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda_n x},\quad x\to\infty.\tag{1.11}$$

Согласно формуле (1.10), имеет место следующее тождество:

$$W\{\varphi_n,h_n\}\equiv\varphi_{n1}h_{n2}-\varphi_{n2}h_{n1}=-C_n,\quad n=1,2,\ldots,N.\tag{1.12}$$

Теорема 1.1. Для того чтобы функция $r^+(\lambda)$, определённая в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<\varepsilon/2$, набор чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ в верхней полуплоскости и набор констант $C_1,\ldots,C_N$ составляли данные рассеяния оператора L вида (1.2) с потенциалом $u(x)$, удовлетворяющим условию (0.6), необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1. $r^+(\lambda)$ имеет тип (S) в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<\varepsilon/2$.

2. Построенные по формуле (1.7) функции $F(x)$ и $\overline{F}(x)$ удовлетворяют при всех $a\in\square$ оценкам

$$|F(x)|e^{2\lambda x}\le\frac{C_1}{(1+|x|)^{1+\delta}},\ x\ge a>-\infty;\qquad |\overline{F}(x)|e^{-2\lambda x}\le\frac{C_2}{(1+|x|)^{1+\delta}},\ x\le a<+\infty.$$

Теорема 1.2. Данные рассеяния однозначно определяют оператор L.

Лемма 1.1. Пусть вектор-функции $Y=\left(Y_1(x,\lambda),Y_2(x,\lambda)\right)^T$, $Z=\left(Z_1(x,\eta),Z_2(x,\eta)\right)^T$ являются решениями уравнений $LY=\lambda Y$ и $LZ=\eta Z$ соответственно. Для компонент этих решений справедливы следующие тождества:

$$\frac{d}{dx}(y_1z_2-z_1y_2)=i(\eta-\lambda)(y_1z_2+z_1y_2);\quad \frac{d}{dx}(y_1z_2^*+z_1^*y_2)=i(\lambda-\eta^*)(y_1z_2^*-z_1^*y_2).$$

Лемма доказывается прямым вычислением.

Эволюция данных рассеяния. Пусть потенциал $u(x,t)$ в системе $LY=\lambda Y$ является решением уравнения:

$$iu_t+P_0(|u(x_0,t)|)(u_{xx}+2|u|^2u)+iP_1(|u(x_1,t)|)(6|u|^2u_x+u_{xxx})=G\tag{2.1}$$

где

$$G(x,t)=-iP_2(|u(x_2,t)|)u_x-P_3(|u(x_3,t)|)u+2i\sum_{k=1}^{N}Q_k(|u(x_0,t)|)(\Phi_{k1}^2-\Phi_{k2}^{*2}).\tag{2.2}$$

Рассмотрим операторы:

$$A_1 = P_0(|u(x_0,t)|)\begin{pmatrix} i(|u|^2 - 2\lambda^2) & iu_x + 2\lambda u \\ iu_x^* - 2\lambda u^* & i(-|u|^2 + 2\lambda^2) \end{pmatrix},$$
$$A_2 = P_1(|u(x_1,t)|)\begin{pmatrix} -4i\lambda^3 + 2i\lambda|u|^2 - u^*u_x + u_x^*u & 4\lambda^2 u + 2i\lambda u_x - u_{xx} - 2u|u|^2 \\ -4\lambda^2 u^* + 2i\lambda u_x^* + u_{xx}^* + 2u^*|u|^2 & 4i\lambda^3 - 2i\lambda|u|^2 + u^*u_x - u_x^*u \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Тогда комбинированный оператор $A = A_1 + A_2$ удовлетворяет соотношению Лакса:

$$L_t(t) + [L(t), A] = R, \quad (2.4)$$

где $R = \begin{pmatrix} 0 & -G \\ G^* & 0 \end{pmatrix}$. Дифференцируя уравнение для собственных значений $L\varphi = \lambda\varphi$ по t, получаем $L_t\varphi + L\varphi_t = \lambda\varphi_t$ которое, используя соотношение (2.4), можно переписать как:

$$(L - \lambda)(\varphi_t - A\varphi) = -R\varphi. \quad (2.5)$$

Воспользовавшись методом вариации постоянных, приходим к равенству:

$$\varphi_t - A\varphi = \alpha(x)\psi + \beta(x)\varphi, \quad (2.6)$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – функции, которые необходимо определить. Подставляя выражение (2.6) в уравнение (2.5) и упрощая, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha'(x)\psi_1 + \beta'(x)\varphi_1 &= -iG\varphi_2, \\ \alpha'(x)\psi_2 + \beta'(x)\varphi_2 &= -iG^*\varphi_1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

из которого можно определить производные $\alpha'(x)$ и $\beta'(x)$ следующим образом:

$$\alpha'(x) = \frac{i(G\varphi_2^2 - G^*\varphi_1^2)}{a}, \qquad \beta'(x) = \frac{i(G^*\varphi_1\psi_1 - G\varphi_2\psi_2)}{a}. \quad (2.8)$$

Используя формулы (1.2) и (2.3) и беря предел при $x \to -\infty$ в равенстве (2.6), получаем:

$$\alpha(\lambda,t) \to 0, \quad \beta(\lambda,t) \to 2i\lambda^2\ P_0(|u(x_0,t)|) + 4i\lambda^3 P_1(|u(x_1,t)|). \quad (2.9)$$

Интегрируя (2.8) и применяя граничные условия (2.9), функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно выразить следующим образом:

$$\alpha(x) = \frac{i}{a}\int_{-\infty}^{x}(G\varphi_2^2 - G^*\varphi_1^2)dx; \quad \beta(x) = \frac{i}{a}\int_{-\infty}^{x}(G^*\varphi_1\psi_1 - G\varphi_2\psi_2)dx + 2i\lambda^2\ P_0(|u(x_0,t)|) + 4i\lambda^3 P_1(|u(x_1,t)|). \quad (2.10)$$

Подставляя выражения (2.10) в уравнение (2.6), получаем:

$$\varphi_t - A\varphi = \frac{i}{a}\int_{-\infty}^{x}(G\varphi_2^2 - G^*\varphi_1^2)dx\psi + \left(\frac{i}{a}\int_{-\infty}^{x}(G^*\varphi_1\psi_1 - G\varphi_2\psi_2)dx + 2i\lambda^2\ P_0(|u(x_0,t)|) + 4i\lambda^3 P_1(|u(x_1,t)|)\right)\varphi. \quad (2.11)$$

Используя асимптотические свойства φ и ψ из (1.2), можно вывести следующие равенства:

$$a_t(\lambda,t) = i\int_{-\infty}^{\infty}(G^*\varphi_1\psi_1 - G\varphi_2\psi_2)dx;$$
$$b_t(\lambda,t) = \frac{i}{a(\lambda,t)}\int_{-\infty}^{\infty}(G\varphi_2^2 - G^*\varphi_1^2)dx + \frac{b(\lambda,t)i}{a(\lambda,t)}\int_{-\infty}^{\infty}(G^*\varphi_1\psi_1 - G\varphi_2\psi_2)dx + b(\lambda,t)(4i\lambda^2 P_0(|u(x_0,t)|) + 8i\lambda^3 P_1(|u(x_1,t)|))$$

Так как $r^+(\lambda,t) = \frac{b(\lambda,t)}{a(\lambda,t)}$, то справедливо следующее:

$$\frac{dr^+(\lambda,t)}{dt} = (4i\lambda^2\ P_0(|u(x_0,t)|) + 8i\lambda^3 P_1(|u(x_1,t)|))r^+(\lambda,t) + \frac{i}{a^2(\lambda,t)}\int_{-\infty}^{\infty}(G\varphi_2^2 - G^*\varphi_1^2)dx. \quad (2.12)$$

Лемма 2.1. Пусть $\varphi(x,\lambda)$ – решение системы уравнений (1.1). Тогда его компоненты удовлетворяют соотношению:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(G\varphi_2^2 - G^*\varphi_1^2)dx = -2\lambda a(\lambda,t)b(\lambda,t)P_2(|u(x_2,t)|) - P_3(|u(x_3,t)|)a(\lambda,t)b(\lambda,t). \quad (2.13)$$

Лемма 2.2. Если векторные функции $\psi_n(x,\lambda), h_n(x,\lambda)$ образуют два решения системы (1.1), то для их компонент выполняются соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(Gh_{n2}\psi_{n2} - G^*h_{n1}\psi_{n1})dx = -2\lambda_n P_2(|u(x_2,t)|) - P_3(|u(x_3,t)|) - 2iQ_n(|u(x_0,t)|)A_n(t), \quad (2.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(G\varphi_{n2}^2 - G^*\varphi_{n1}^2)dx = 0, \qquad \frac{d\lambda_n}{dt} = 0, \quad n = 1,2,\ldots,N. \tag{2.15}$$

Теорема 2.1. Пусть множество функций $\{u(x,t),\Phi_{k_1}(x,t),\Phi_{k_2}(x,t),k=\overline{1,N}\}$ является решением задачи (0.3)-(0.7). Тогда данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.15), (2.22) и (2.16).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19. P 1095-1097. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1095

2. Hirota R. The Direct Method in Soliton Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

3. Hoitmetov U.A., Musaeva F.K. On the initial value problem for the non-stationary nonlinear Hirota equation with a lower-order term // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2025. Vol. 51, No. 2. P. 259-276. https://doi.org/10.30546/2409-4994.2025.51.2.4103

4. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A., Sobirov Sh.K. Integration of the mKdV equation with nonstationary coefficients and additional terms in the case of moving eigenvalues // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2023. Vol. 61. P. 137-155.