УДК 517.956.3

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Юлбарсов Хожиакбар Акбарович,
старший преподаватель Ферганского государственного технического университета, (PhD)
xojiakbaryulbarsov1@gmail.com
Шокиров Асроржон Муроджонович,
старший преподаватель Ферганского государственного технического университета, (PhD)
asrorshokirov87@gmail.com

Аннотация. *В данной работе изучена обратная задача для уравнения гиперболического типа третьего порядка с частными производными, направленная на определение коэффициента. Сформулирована обратная задача, заключающаяся в нахождении неизвестного коэффициента, зависящего от пространственных переменных. Для решения обратной задачи в качестве дополнительной информации использованы значения решения задачи в фиксированной внутренней точке. В процессе доказательства задача сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Для изучения существования и единственности решения применен метод сжимающих отображений.*

Ключевые слова: *гиперболическое уравнение третьего порядка, обратная задача, функция источника, единственность, существование, уравнение Вольтерра.*

INVERSE PROBLEMS FOR THIRD-ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS

Abstract*. This work investigates an inverse problem for a third-order hyperbolic partial differential equation aimed at determining a coefficient. The inverse problem is formulated as finding an unknown coefficient that depends on spatial variables. To solve the inverse problem, the values of the solution at a fixed internal point are used as additional information. During the proof, the problem is reduced to a system of Volterra integral equations of the second kind with respect to the unknown coefficient. The method of contraction mappings is applied to study the existence and uniqueness of the solution.*

Keywords: *third-order hyperbolic equation, inverse problem, source function, uniqueness, existence, Volterra equation.*

UCHINCHI TARTIBLI GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN TESKARI MASALA

Annotatsiya. *Ushbu ishda xususiy hosilali uchinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglama uchun koeffitsiyentni aniqlash uchun teskari masala o‘rganilgan. Fazoviy o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan noma’lum koeffitsiyentni aniqlashdan iborat teskari masala qo‘yiladi. Teskari masalani yechish uchun qo‘shimcha ma’lumot sifatida ichki nuqtadagi masala yechimini qiymatlari ko‘rsatilgan. Isbotlash jarayonida ikkinchi turdagi Volterra integral tenglamalar sistemasiga keltrilib, yechimining mavjudligi va yagonaligini o‘rganishda siqib akslantrish usuli qo`llanilgan.*

Kalit so‘zlar: *uchinchi tartibli giperbolik tenglama, teskari masala, manba funksiyasi, yagona bo‘lishlik, mavjudlik, Volterra tenglamasi.*

Введение и постановка задачи. Задачи, связанные с моделированием процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1], процесс влагопереноса в почво-грунтах [2,3], передачи тепла в гетерогенной среде [4] описываются псевдопараболическими и псевдогиперболическими уравнениями третьего порядка. Распространение акустических волн в слабонеоднородных средах [5] приводится к краевым задачам для гиперболического уравнения третьего порядка.

Под обратными задачами для дифференциальных уравнений понимают задачи нахождения неизвестных коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по заданной дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи.

Обратные задачи являются динамично развивающимся направлением современной математики. Обратным задачам для гиперболических и параболических уравнений второго порядка посвящено очень много работ. Например, в монографиях В.Г. Романова [6,7], С. И. Кабанихина [8] исследованы обратные задачи для гиперболических уравнений, а монографии Ю.Я. Белова [9], М. Иванчова [10], А. И. Прилепко, И. А. Васина, Д. Г. Орловского [11] посвящены обратным задачам для параболических уравнений второго порядка. В монографиях [12,13] изучены обратные задачи для псевдопараболических и псевдо-гиперболических уравнений третьего порядка.

Для гиперболических уравнений третьего порядка известны некоторые результаты. Например, обратная задача определения неизвестного коэффициента, зависящего от времени, для гиперболического уравнения третьего порядка исследована в работе [14], а в работе [15] изучена обратная задача определения источника, зависящего от времени. Обратные задачи определения коэффициента, зависящего от пространственных переменных, ранее не рассматривались.

В области $\Omega = \{(x,t),\ t>0,\ x \in R\}$ рассмотрим уравнение

$$L_0 u(x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{xx} - u_{tt}\right) = f(x,t). \tag{1}$$

Задача 1. Требуется найти решение уравнение (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ u_t(x,0) = \varphi_1(x),\ u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in R. \tag{2}$$

Определение. Классическим решением задачи (1)-(2) называется такая функция $u(x,t)$ которая имеет непрерывные производные требуемого порядка и удовлетворяют условиям (1), (2).

Классическое решение задачи можно получить разными методами, например, методом характеристик, с помощью фундаментального решения оператора L [16] и с помощью функции Римана [17]. Справедлива

Теорема 1. Пусть $\varphi_0(x) \in C^3(R),\ \varphi_1(x) \in C^2(R),\ \varphi_2(x) \in C^1(R), f(x,t) \in C(\bar{\Omega})$. Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)-(2). Это решение имеет вид:

$$u(x,t) = \varphi_0(x) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \left(t - |x-\xi|\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left(t-\tau+|x-\xi|\right) f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\,. \tag{3}$$

Доказательство. Так как задача линейна, то пользуясь принципом суперпозиции, решение задачи (1)-(2) ищем в виде суммы:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{4}$$

где функция $v(x,t)$ есть решение однородного уравнения с неоднородными начальными условиями:

$$L_0 v(x,t) = 0, \qquad \frac{\partial^i v}{\partial t^i}(x,0) = \varphi_i(x), \qquad i = 0,1,2, \tag{5}$$

а $w(x,t)$ – решение неоднородного уравнения с однородными начальными условиями:

$$L_0 w(x,t) = f(x,t), \qquad \frac{\partial^i w}{\partial t^i}(x,0) = 0, \qquad i = 0,1,2\,. \tag{6}$$

Таким образом, для решения задачи (1)-(2) достаточно решить задачи (5) и (6). Сначала решим задачу (5).

Общее решение задачи (5) таково [18]:

$$v(x,t) = F(x-t) + \Phi(x+t) + \omega(x), \tag{7}$$

зависящее от трёх произвольных трижды дифференцируемых функций $F(x-t)$, $\Phi(x+t)$, $\omega(x)$. Теперь мы выделим из общего решения (7) единственное решение, удовлетворяющее условиям (2). Из условия (2) имеем:

$$\begin{cases} v(x,0)=F(x)+\Phi(x)+\omega(x)=\varphi_0(x), \\ v_t(x,0)=-F'(x)+\Phi'(x)=\varphi_1(x), \\ v_{tt}(x,0)=F''(x)+\Phi''(x)=\varphi_2(x). \end{cases} \tag{8}$$

Чтобы найти $F(x)$, $\Phi(x)$, $\omega(x)$ дважды продифференцируем первое уравнение системы (8) по x и отделим третье уравнение.

$$\omega''(x)=\varphi_0''(x)-\varphi_2(x). \tag{9}$$

$\omega(x)$ находим, заменив выражение (9) на $x\sim s$ и проинтегрировав по интервалу $0<s<x$, затем заменив на $x\sim s$, $s\sim\xi$ и проинтегрировав по интервалу $0<s<x$.

$$\omega(x)=\omega(0)-\varphi_0(0)+x\omega'(0)-x\varphi_0'(0)+\varphi_0(x)-\int_0^x(x-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi. \tag{10}$$

В равенстве (8) заменив переменную второй строки на $x\sim s$ и проинтегрировав по интервалу $0<s<x$, получим следующее.

$$-F(x)+\Phi(x)=\Phi(0)-F(0)+\int_0^x\varphi_1(s)ds. \tag{11}$$

Добавляя выражения (11) в первую строку системы (8), находим $\Phi(x)$.

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(0)-\omega(0)-x\omega'(0)-x\varphi_0'(0)+\int_0^x(x-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi+\Phi(0)-F(0)+\int_0^x\varphi_1(s)ds\right] \tag{12}$$

$F(x)$ находим, вычитая выражения (10), (12) из первой строки системы (8).

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(0)-\omega(0)-x\omega'(0)-x\varphi_0'(0)+\int_0^x(x-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi-\Phi(0)+F(0)-\int_0^x\varphi_1(s)ds\right] \tag{13}$$

Подставляя найденные выражения $F(x)$, $\Phi(x)$, $\omega(x)$ в общее решение (7), находим регулярное решение задачи (5).

$$v(x,t)=\varphi_0(x)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(s)ds+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left(t-|x-\xi|\right)\varphi_2(\xi)d\xi. \tag{14}$$

Чтобы найти решение задачи (6), воспользуемся принципом Дюамеля. Для задачи (6) сопутствующей [19], будет задача:

$$LP(x,t,\tau)=0,\ P(x,t,\tau)\big|_{t=\tau}=0,\ P_t(x,t,\tau)\big|_{t=\tau}=0,\ P_{tt}(x,t,\tau)\big|_{t=\tau}=-f(x,\tau),\quad 0<\tau<t \tag{15}$$

Введя новую независимую переменную $z=t-\tau$ задачу (15) перепишем в виде:

$$LP(x,t,t-z)=0,\ P(x,t,t-z)\big|_{z=0}=0,\ P_t(\xi,\eta,t-z)\big|_{z=0}=0, P_{tt}(x,t,t-z)\big|_{z=0}=-f(x,t-z),\ z>0.$$

Её решение находится по формуле:

$$P(x,t,t-z)=-\frac{1}{2}\int_{x-z}^{x+z}\left(z-|x-\xi|\right)f(\xi,t-z)\,d\xi.$$

Возвращаясь к переменной z, решение сопутствующей задачи (15) запишем в виде

$$P(x,t,\tau)=-\frac{1}{2}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left(t-\tau-|x-\xi|\right)f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

и, следовательно, в силу принципа Дюамеля, решение задачи (6) будет:

$$w(x,t)=-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left(t-\tau-|x-\xi|\right)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\,. \tag{16}$$

Сложив (14) и (16), получим формулу (3).

Так как $\varphi_0(x)\in C^3(R)$, $\varphi_1(x)\in C^2(R)$, $\varphi_2(x)\in C^1(R)$, $f(x,t)\in C(\bar{\Omega})$, то формула (4) даёт классическое решение задачи (1)-(2), в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Обратная задача для оператора $L_q=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)+q(x)$.

Для уравнения

$$L_q v(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)v(x,t)+q(x)v(x,t)=f(x,t), \tag{17}$$

рассмотрим в области Ω задачу Коши с начальным условием:

$$v(x,0)=\varphi_0(x),\ v_t(x,0)=\varphi_1(x),\ v_{tt}(x,0)=\varphi_2(x),\quad x\in R. \tag{18}$$

В прямой задаче требуется определить функцию $v(x,t)$ по известным функциям $q(x), f(x,t), \varphi_i(x),\ i=0,1,2$.

Прямая задача является корректной, если подходящим образом подобраны функциональные пространства для данных задачи и пространство решений. В частности, задача (17), (18) корректна, если $q,\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\in C(R)$ а $f,v\in C(R\times R_+)$. При этом функция $v(x,t)$ является, вообще говоря, обобщенным решением задачи (17), (18). Ниже будет показано, что более жесткие требования к данным этой задачи, а именно, $q(x)\in \mathrm{C}(R),\varphi_0(x)\in C^3(R),\varphi_1(x)\in C^2(R),\varphi_2(x)\in C^1(R), f\in C^1\left(R\times(0,T]\right)$, гарантируют существование в $R\times(0,T]$ классического решения задачи (17), (18), т. е. $v(x,t)\in C^3\left(R\times(0,T]\right)$.

Обратная задача с распределёнными начальными данными для уравнения (17) формулируется следующим образом: найти $q\in C(R)$, если о

решении прямой задачи (17), (18) известна дополнительная информация:

$$v(x_0,t)=\psi_0(t),\ v_x(x_0,t)=\psi_1(t),\quad t\ge 0, \tag{19}$$

где $x_0\in R$ - некоторая фиксированная точка. Другими словами, требуется по известным функциям $q(x), f(x,t), \varphi_i(x), \psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$, $i=0,1,2$ найти функции $q(x)$ и $v(x,t)$, удовлетворяющие (17)-(19).

Поскольку функции ψ_0 и ψ_1 являются следами функций v, v_x на прямой $x=x_0$, то они не могут быть произвольными, в частности, они должны удовлетворять некоторым условиям гладкости в зависимости от гладкости данных $q(x), f(x,t), \varphi_i(x),\ i=0,1,2$. Иначе говоря, необходимые

условия на ψ_0, ψ_1 вытекают из свойств решений прямой задачи (17), (18), к изучению которых мы и перейдем.

Обозначим через $\Delta(x_0,t_0)$ треугольник на полуплоскости $R\times R_+$, ограниченный осью x и характеристиками уравнения (17), проведёнными через точку (x_0,t_0) где $R\times R_+ = \{x\in R: t>0\}$.

Лемма 1. Если для каких-либо $t_0>0,\ x_0\in R$ функции $q, f, \varphi_i,\ i=0,1,2$ таковы, $q\in C[x_0-t_0, x_0+t_0]$, $\varphi_0\in C^3[x_0-t_0, x_0+t_0]$, $\varphi_1\in C^2[x_0-t_0, x_0+t_0]$, $\varphi_2(x)\in C^1[x_0-t_0, x_0+t_0]$, $f(x,t)\in C^1(\Delta(x_0,t_0))$, то в области $\Delta(x_0,t_0)$ существует единственное классическое решение прямой задачи (17), (18).

Доказательство. Задача (3.1), (3.) сводится к линейному интегральному уравнению относительно функции $v(x,t)$. Действительно, перепишем уравнение (17) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)v(x,t)=f(x,t)-q(x)v(x,t). \tag{20}$$

Используя решение задачи Коши (1), (2), выразим решение задачи (20), (18) в следующем виде:

$$v(x,t)=\varphi_0(x)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(s)ds+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left(t+|x-\xi|\right)\varphi_2(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)\left[f(\xi,\tau)-q(\xi)v(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau.$$

Следовательно, решение $v(x,t)$ задачи (17), (18) удовлетворяет интегральному уравнению:

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{1}{2}\iint_{\Delta(x,t)}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)q(\xi)v(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ (x,t)\in\Delta(x_0,t_0), \tag{21}$$

где

$$u(x,t)=\varphi_0(x)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(s)ds+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left(t+|x-\xi|\right)\varphi_2(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Уравнение (21) определяет единственное решение непрерывное в $\Delta(x_0,t_0)$. Для того чтобы доказать это, воспользуемся методом последовательных приближений, представив $v(x,t)$ в виде ряда:

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(x,t) \tag{22}$$

где $v_n(x,t), n\geq 1$, находятся по формулам:

$$v_n(x,t)=\frac{1}{2}\iint_{\Delta(x,t)}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)q(\xi)v_{n-1}(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ (x,t)\in\Delta(x_0,t_0),\ n\geq 1. \tag{23}$$

Докажем равномерную сходимость ряда (22) в области $\Delta(x_0,t_0)$.

Заметим, что в условиях леммы $u\in C^3(\Delta(x_0,t_0))$. Из формулы (23) следует, что все v_n непрерывны в $\Delta(x_0,t_0)$. Обозначим

$$U_n(t)=\max_{x_0+(t-t_0)\leq x\leq x_0-(t-t_0)}|v_n(x,t)|,\ 0\leq t\leq t_0,\ \|q\|_0=\max_{x_0+(t-t_0)\leq x\leq x_0-(t-t_0)}|q(x)|,$$

$$\|v\|_k=\sum_{|\alpha|\leq k}\max_{(x,t)\in\Delta(x_0,t_0)}|D^\alpha v(x,t)|,\ k=0,1,2, \tag{24}$$

где

$$D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}},\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2.$$

Тогда из (23) следует оценка:

$$U_n(t)\le\frac{1}{2}\int_0^t\max_{x_0+(t-t_0)\le x\le x_0-(t-t_0)}\left|\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)q(\xi)v_{n-1}(\xi,\tau)\,d\xi\right|d\tau\le$$

$$\le\|q\|_0\int_0^t(t-\tau)^2U_{n-1}(\tau)\,d\tau,\ n\ge1,\ 0\le t\le t_0.$$

Применяя последовательно эту оценку для $n=1,2,...,$ получим:

$$|U_1(t)|\le\|v\|_0\|q\|_0\frac{t^3}{3!},\ |U_2(t)|\le\|v\|_0\|q\|_0^2\frac{t^6}{6!},\ |U_3(t)|\le\|v\|_0\|q\|_0^3\frac{t^9}{9!},....$$

$$....,|U_n(t)|\le\|v\|_0\|q\|_0^n\frac{t^{3n}}{(3n)!},\ n\ge1. \tag{25}$$

Из неравенства (25) следует, что

$$|v_n(x,t)|\le U_n(t)\le\|v\|_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\|q\|_0t_0^3\right)^n}{(3n)!}.$$

Поскольку числовой ряд $\|v\|_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\|q\|_0t_0^3\right)^n}{(3n)!}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд (22) сходится равномерно в области $\Delta(x_0,t_0)$ и определяет непрерывную в области $\Delta(x_0,t_0)$ функцию $v(x,t)$, которая является решением уравнения (21). Решение единственно, так как однородное уравнение

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\iint_{\Delta(x,t)}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)q(\xi)v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{26}$$

имеет только нулевое решение в классе непрерывных функций в области $\Delta(x_0,t_0)$ Действительно, обозначив

$$U(t)=\max_{x_0-(t_0-t)\le x\le x_0+(t_0-t)}|v(x,t)|,$$

заметим, что из (26) следует интегральное неравенство Грануолла [20]

$$U(t)\le\|q\|_0\int_0^t(t-\tau)^2U(\tau)\,d\tau,\ 0\le t\le t_0.$$

Решением этого неравенства, как известно, является только $U(t)\equiv0$. Следовательно, $v(x,t)\equiv0$ при $(x,t)\in\Delta(x_0,t_0)$.

Мы доказали существование единственного непрерывного решения уравнения (21). Покажем, что это решение имеет непрерывные производные до второго порядка в области $\Delta(x_0,t_0)$ и определяет классическое решение задачи (17), (18). Перепишем (21) в виде

$$v(x,t)=u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)q(\xi)v(\xi,\tau)\,d\xi\right]d\tau,\ (x,t)\in\Delta(x_0,t_0). \tag{27}$$

Так как $v\in C^3\left(\Delta(x_0,t_0)\right)$, выражение в правой части равенства (27) имеет по переменным x и t частные производные первого порядка. Поэтому и левая часть равенства (27), т. е. функция $v(x,t)$, имеет частные производные первого порядка:

$$v_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}q(\xi)v(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{28}$$

$$v_x(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} sign(\xi-x)q(\xi)v(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (29)$$

Полученные равенства показывают, что $v_t(x,t), v_x(x,t)$ являются непрерывными функциями в области $\Delta(x_0,t_0)$ и имеют частные производные первого порядка по переменным x и t. Значит, функция $v(x,t)$ имеет в области $\Delta(x_0,t_0)$ частные производные второго порядка:

$$v_{tt}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x+t-\tau)v(x+t-\tau,\tau)+q(x-t+\tau)v(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau, \quad (30)$$

$$v_{xt}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x+t-\tau)v(x+t-\tau,\tau)-q(x-t+\tau)v(x-t+\tau,\tau)\right]d\tau, \quad (31)$$

$$v_{xx}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x-t+\tau)v(x-t+\tau,\tau)-q(x+t-\tau)v(x+t-\tau,\tau)\right]d\tau. \quad (32)$$

Заменяя переменные в последнем интеграле $t-\tau=z$, получим:

$$v_{tt}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x+z)v(x+z,t-z)+q(x-z)v(x-z,t-z)\right]dz, \quad (33)$$

$$v_{xt}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x+z)v(x+z,t-z)-q(x-z)v(x-z,t-z)\right]dz, \quad (34)$$

$$v_{xx}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x-z)v(x-z,t-z)-q(x+z)v(x+z,t-z)\right]dz. \quad (35)$$

Дифференцируя последние равенства по t, получим:

$$v_{ttt}(x,t)=\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,t)+\frac{1}{2}\left[q(x+t)v(x+t,0)+q(x-t)v(x-t,0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x+z)v_t(x+z,t-z)+q(x-z)v_t(x-z,t-z)\right]dz. \quad (36)$$

$$v_{xtt}(x,t)=\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}u(x,t)+\frac{1}{2}\left[q(x+t)v(x+t,0)-q(x-t)v(x-t,0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x+z)v_t(x+z,t-z)-q(x-z)v_t(x-z,t-z)\right]dz. \quad (37)$$

$$v_{xxt}(x,t)=\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}u(x,t)+\frac{1}{2}\left[q(x+t)v(x+t,0)-q(x-t)v(x-t,0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left[q(x-z)v_t(x-z,t-z)-q(x+z)v_t(x+z,t-z)\right]dz. \quad (38)$$

Из формул (36)-(38) следует, что $v_{ttt}, v_{xtt}, v_{xxt}\in C\left(\Delta(x_0,t_0)\right)$, т. е. $v\in C^3\left(\Delta(x_0,t_0)\right)$. Таким образом, лемма доказана.

Очевидно, что при выполнении условий леммы 1 данные обратной задачи $\psi_0(t),\psi_1(t)$ должны обладать следующей гладкостью:

$$\psi_0(t)\in \mathrm{C}^3[0,t_0], \quad \psi_1(t)\in \mathrm{C}^2[0,t_0]. \quad (39)$$

Функции $\psi_0(t), \psi_1(t)$ также должны удовлетворять некоторым условиям согласования с данными прямой задачи. Эти условия вытекают из сопоставления значений функции $v(x,t)$ и ее производных в точке $(x_0, 0)$, вычисляемых по данным (18), (19):

$$\varphi_0(x_0) = \psi_0(0),\ \varphi_0'(x_0) = \psi_1(0),$$
$$\varphi_1(x_0) = \psi_0'(0),\ \varphi_1'(x_0) = \psi_1'(0),$$
$$\varphi_2(x_0) = \psi_0''(0),\ \varphi_2'(x_0) = \psi_1''(0). \tag{40}$$

Условия (39), (40), являющиеся необходимыми условиями существования решения обратной задачи, являются также и достаточными для существования ее решения в малом.

Теорема 2. Если для каких-либо $t_0 > 0, x_0 \in R$ выполнены условия леммы 1, условия (39), (40) и условие

$$|\varphi_0(x)| \geq \alpha > 0, \quad x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0], \tag{41}$$

то для достаточно малых $T > 0$ решение $q(x)$ обратной задачи (17) - (19) на отрезке $[x_0 - T, x_0 + T]$ существует и единственно в классе $C[x_0 - T, x_0 + T]$.

Доказательство. В формулах (36), (37) положим $x = x_0$ и воспользуюсь данными (19) имеем:

$$\psi_0'''(t) = \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x_0, t) + \frac{1}{2}\left[q(x_0 + t)v(x_0 + t, 0) + q(x_0 - t)v(x_0 - t, 0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[q(x_0 + z)v_t(x_0 + z, t - z) + q(x_0 - z)v_t(x_0 - z, t - z)\right]dz, \tag{42}$$

$$\psi_1''(t) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} u(x_0, t) + \frac{1}{2}\left[q(x_0 + t)v(x_0 + t, 0) - q(x_0 - t)v(x_0 - t, 0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[q(x_0 + z)v_t(x_0 + z, t - z) - q(x_0 - z)v_t(x_0 - z, t - z)\right]dz,\ t \in [0, t_0]. \tag{43}$$

Из этих формул, с учётом (18), находится $q(x)$ для $x \geq x_0$ и $x \leq x_0$.

$$q(x) = \frac{1}{\varphi_0(x)}\left\{\psi_0'''(x - x_0) + \psi_1''(x - x_0) - \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2}\right)u(x_0, t)\right]_{t = x - x_0} - \right.$$
$$\left. - \left[\int_0^t q(x_0 + z)v_t(x_0 + z, t - z)dz\right]_{t = x - x_0}\right\},\ x_0 \leq x \leq x_0 + t_0,$$
$$q(x) = \frac{1}{\varphi_0(x)}\left\{\psi_0'''(x_0 - x) - \psi_1''(x_0 - x) - \left[\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2}\right)u(x_0, t)\right]_{t = x_0 - x} - \right.$$
$$\left. - \left[\int_0^t q(x_0 - z)v_t(x_0 - z, t - z)dz\right]_{t = x_0 - x}\right\},\ x_0 - t_0 \leq x \leq x_0.$$

Эти два равенства можно объединить в одно:

$$q(x) = q_0(x) + \left[\frac{1}{\varphi_0(x)}\int_0^t q(x_0 + sign(x - x_0)z)v_t(x_0 + sign(x - x_0)z, t - z)dz\right]_{t = |x - x_0|},$$
$$x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]. \tag{44}$$

где

$$q_0(x)=\frac{1}{\varphi_0(x)}\{\psi_0'''|x-x_0|+sign(x-x_0)\psi_1''|x-x_0|-$$

$$-\left[\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}+sign(x-x_0)\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\right)u(x_0,t)\right]_{t=|x-x_0|}\Bigg\}. \quad (45)$$

Несмотря на наличие разрывного множителя $sign(x-x_0)$, функция $q_0(x)$ является непрерывной на отрезке $[x_0-t_0,x_0+t_0]$ в силу условий согласования (40). Действительно, поскольку

$$\frac{1}{\varphi_0(x)}\left\{\psi_1''|x-x_0|-\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}u(x,t)\right\}\Bigg|_{x=x_0,t=0}=\frac{1}{\varphi_0(x_0)}\{\psi_1''(0)-\varphi_2'(x_0)\}=0, \quad (46)$$

множитель, стоящий перед $sign(x-x_0)$, обращается при $x=x_0$ в нуль.

Система уравнений (21), (28), (44) является замкнутой системой интегральных уравнений второго рода. Легко показать, что при достаточно малых $T>0$ для этой системы уравнений в области $\Delta(x_0,t_0)$ имеет место принцип сжатых отображений. Удобно для этого записать эту систему уравнений в виде одного векторного равенства:

$$\rho=A\rho, \quad (47)$$

где $\rho=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ векторная функция переменных x,t с компонентами которой есть искомые функции

$$\rho_1(x,t)=v(x,t),\ \rho_2(x,t)=v_t(x,t),\ \rho_3(x,t)=q(x),$$

а компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами

$$A_1\rho_1=u(x,t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)}\left(t-\tau+|x-\xi|\right)q(\xi)\rho_1(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (48)$$

$$A_2\rho_2=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)}q(\xi)\rho_1(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (49)$$

$$A_3\rho_3=q_0(x)+\left[\frac{1}{\varphi_0(x)}\int_0^t q(x_0+sign(x-x_0)z)\rho_2(x_0+sign(x-x_0)z,t-z)dz\right]_{t=|x-x_0|}. \quad (50)$$

Рассмотрим область $\Delta(x_0,T)$, где T - произвольное положительное число. Очевидно, что оператор A переводит функции $\rho\in C(\Delta(x_0,t_0))$ в функции, также принадлежащие пространству $C(\Delta(x_0,t_0))$. Покажем теперь, что при достаточно малом T оператор A осуществляет сжатое отображение шара радиуса M с центром в точке $\rho_0=(\rho_{01},\rho_{02},\rho_{03})$:

$$\rho_{01}=u(x,t),\qquad \rho_{02}=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t),\qquad \rho_{03}=q_0(x),$$

в себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (47) имеет в области $\Delta(x_0,t_0)$ при достаточно малом T, единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству:

$$\|\rho-\rho_0\|(T)\le M. \quad (51)$$

Норму $\|\rho\|$ естественно здесь определить равенством:

$$\|\rho\|(T)=\max_{1\le k\le 3}\max_{(x,t)\in\Delta(x_0,t_0)}\left|\rho_k(x,t)\right|. \tag{52}$$

Очевидно, что для элементов $\rho,$ принадлежащих шару $S(\rho_0,M),$ имеет место оценка:

$$\|\rho\|\le\|\rho_0\|+M=K. \tag{53}$$

С другой стороны, непосредственно оценивая интегралы, входящие в (48), (49), (50) находим:

$$\left|A_1\rho-\rho_{01}\right|\le\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)}\left(t-\tau+\left|x-\xi\right|\right)\left|\rho_3(x,t)\right|\left|\rho_1(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2}K^2\int_0^t(t-\tau)^2\,d\tau\le\frac{1}{6}K^2T^3,$$

$$\left|A_2\rho-\rho_{02}\right|\le\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)}\left|\rho_3(x,t)\right|\left|\rho_1(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2}K^2\int_0^t 2(t-\tau)\,d\tau\le\frac{1}{2}K^2T^2,$$

$$\left|A_3\rho-\rho_{03}\right|\le\frac{1}{\varphi_0(x)}\int_0^t\left|\rho_3\left(x_0+sign(x-x_0)z\right)\right|\left|\rho_2\left(x_0+sign(x-x_0)z,t-z\right)\right|dz\Bigg|_{t=|x-x_0|}\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha}K^2\int_0^t dz\le\frac{K^2T}{\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\|A\rho-\rho_0\|\le K^2\max\left(\frac{T^3}{3},\frac{T^2}{2},\frac{2T}{\alpha}\right).$$

Поэтому, при $T\le T^*$ оператор A переводит $S(\rho_0,M)$ в себя, где T^* определяется равенством:

$$T^*=\min\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\|\rho\|(T)}},\sqrt{\frac{2}{\|\rho\|(T)}},\frac{\alpha}{2\|\rho\|(T)}\right).$$

Нам остаётся показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(\rho_0,M)$. Для доказательства этого возьмём произвольные два элемента $\rho^1,\rho^2\in S(\rho_0,M)$ и оценим норму разности между их образами $A\rho^1,A\rho^2$. Обозначим компоненты элементов ρ^1,ρ^2 через $\rho_i^1,\rho_i^2,\ i=1,2,3.$ При оценке $\left\|A\rho^1-A\rho^2\right\|$ воспользуемся вспомогательными неравенствами типа

$$\left|\rho_i^{(1)}\rho_s^{(1)}-\rho_i^{(2)}\rho_s^{(2)}\right|\le\left|\rho_i^{(1)}\right|\left|\rho_s^{(1)}-\rho_s^{(2)}\right|+\left|\rho_s^{(2)}\right|\left|\rho_i^{(1)}-\rho_i^{(2)}\right|\le 2K\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T),$$

которые имеют место для произвольных $\rho^1,\rho^2\in S(\rho_0,M)$. Используя формулы (48), (49), (50) находим:

$$\left|A_1\rho^1-A_1\rho^2\right|\le\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)}\left(t-\tau+\left|x-\xi\right|\right)\left|\rho_3^1(x,t)\,\rho_1^1(\xi,\tau)-\rho_3^2(x,t)\,\rho_1^2(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2}\cdot 2K\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T)\cdot\frac{t^3}{3}\le\frac{1}{3}KT^3\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T),$$

$$\left|A_2\rho^1-A_2\rho^2\right|\le\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x_0,t_0)}\left|\rho_3^1(x,t)\,\rho_1^1(\xi,\tau)-\rho_3^2(x,t)\,\rho_1^2(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau\le$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot 2K\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T)\cdot t^2 \le \frac{1}{2}KT^2\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T),$$

$$\left|A_3\rho^1-A_3\rho^2\right| \le \frac{1}{\varphi_0(x)}\int_0^t \left|\rho_3^1\left(x_0+sign(x-x_0)z\right)\rho_2^1\left(x_0+sign(x-x_0)z,t-z\right)-\right.$$

$$\left.-\rho_3^2\left(x_0+sign(x-x_0)z\right)\rho_2^2\left(x_0+sign(x-x_0)z,t-z\right)\right|dz\Big|_{t=|x-x_0|} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}2K\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T)t \le \frac{2KT}{\alpha}\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T).$$

Отсюда следует, что

$$\left\|A\rho^1-A\rho^2\right\| \le 2K\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T)\max\left(\frac{T^3}{3},\frac{T^2}{2},\frac{2T}{\alpha}\right) \le \frac{T}{T^*}\left\|\rho^1-\rho^2\right\|(T).$$

Отсюда вытекает, что при любом $T<T*$ оператор A осуществляет сжимающее отображение множества $M(T)$ в себя. Тогда в силу теоремы Банаха на множестве $M(T)$ существует единственная неподвижная точка отображения, т. е. существует единственное решение уравнения (47). Следовательно, решая систему уравнений (21), (28), (44), например, методом последовательных приближений, мы однозначно построим в области $\Delta(x_0,T)$ для $T\in(0,T^*)$ функции $v(x,t),v_t(x,t),q(x)$. Тем самым определяется решение $q(x)$ на отрезке $[x_0-T,x_0+T]$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 58–73.

2. Hallaire M. L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. № 9.

3. Чудновский А. Ф. Теплофизика почвы. Москва: Наука, 1976. 352 с.

4. Дзекцер Е. С. Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Доклады АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543.

5. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. Москва: Наука, 1975. 289 с.

6. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984. 264 с.

7. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. Москва: Научный Мир, 2005. 295 с.

8. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin: De Gruyter. 2011.

9. Belov Yu.Ya. Inverse problems for partial differential equations. Utrecht: VSP. 2002.

10. Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. Mathematical studies. Monograph Series. 2003.

11. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.

12. Аблабеков Б. С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. Бишкек: Илим, 2001. 183 с.

13. Аблабеков Б. С., Асанов А. Р., Курманбаева А. К. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. Бишкек: Илим, 2011. 156 с.

14. Аблабеков Б. С., Жороев А. К. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.- мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9–18.

15. Аблабеков Б. С., Жороев А. К. Об определении источника, зависящего от времени в гиперболическом уравнении третьего порядка // Евразийское Научное Объединение. 2021. Т. 1. № 7 (77). С. 1–3.

16. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. Бишкек: КГНУ, 1997. - 184 с.

17. Colton, D. Solution of boundary value problems by the method of integral operators. – London: Pitman. Publ., 1976. -220 p.

18. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. -Ташкент.:Изд-во Фан, Узбекской 1986. –220 с.

19. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных.-М.:Изд-во РУДН,1997. –447 с.

20. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959.