УДК 517.957

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ, ЗАДАННОЙ ГРАНИЧНЫМ ПОТОКОМ И ИСТОЧНИКОМ

Ярметова Дилафруз Ибодулла кизи,
Национальный университет Узбекистана
им. М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан
saidovadilafruz1996@gmail.com

Аннотация. *Рассмотрена краевая задача для системы нелинейной диффузии с источником в многомерном полупространстве. Исследованы качественные свойства решений, включая глобальную разрешимость по времени и возникновение режима с обострением. Проведён автомодельный анализ, а также исследовано асимптотическое поведение автомодельных решений. Построены схемы и алгоритмы численного решения, а также визуализированы.численные результаты.*

Ключевые слова: *система нелинейной диффузии, критические показатели, глобальное решение, граничный поток, неограниченное решение, асимптотическое поведение.*

CHEGARAVIY OQIM VA MANBA ORQALI BERILGAN NOCHIZIQLI DIFFUZIYA SISTEMASINI TADQIQ ETISH

Annotatsiya. *Ko‘p o‘lchovli yarim fazoda manbaga ega nochiziqli diffuziya sistemasiga qo’yilgan chegaraviy masala qaralgan. Yechimlarning sifat xossalari, jumladan, vaqt bo‘yicha global bo‘lishi va chegaralanmagan yechimlarning yuzaga kelishi tadqiq etilgan. Avtomodel tahlil o‘tkazilgan, shuningdek, avtomodel yechimlarning asimptotik xatti-harakati o‘rganilgan. Sonli yechish sxemalari va algoritmlari ishlab chiqilgan hamda sonli natijalar vizuallashtirilgan.*

Kalit so‘zlar: *nochiziqli diffuziya sistemasi, kritik ko‘rsatkichlar, global yechim, chegaraviy oqim, chegaralanmagan yechim, asimptotik xulq-atvor.*

INVESTIGATION OF A NONLINEAR DIFFUSION SYSTEM GOVERNED BY BOUNDARY FLUX AND SOURCE

Abstract. *A boundary value problem for a nonlinear diffusion system with a source term in a multidimensional half-space is considered. Qualitative properties of solutions, including global-in-time existence and the occurrence of blow-up regimes, are investigated. A self-similar analysis is carried out, and the asymptotic behavior of self-similar solutions is studied. Numerical schemes and algorithms for solving the problem are developed, and the numerical results are visualized*

Keywords: *nonlinear diffusion system, critical exponents, global existence, boundary flux, unbounded solution, asymptotic behavior.*

Введение. Нелинейные уравнения диффузии–реакции находят широкое применение при математическом моделировании процессов тепло- и массопереноса, динамики популяций, химической кинетики, физики плазмы и процессов переноса в пористых средах.

Основные свойства нелинейных диффузионных моделей, таких как уравнение пористой среды и уравнение с p-лапласианом, подробно описаны в работах Васкеса [1] и Аронсона [2]. Основы анализа критических показателей, разделяющих глобальное существование решений и их разрушение, были заложены в классических трудах Фуджиты [3].

В последние годы особое внимание уделяется двухкратно нелинейным уравнениям диффузии и системам кросс-диффузии [4-6]. В современной работе Абдинаби Мухаммадиева, Жасур Урунбаева и соавторов[7] исследовано автомодельное поведение решений системы кросс-диффузии с нелинейным граничным потоком в неоднородной среде. Авторы изучали качественные свойства обобщённых решений и их асимптотику.

Мы рассматриваем систему:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \left(\left| \nabla u^{m_1} \right|^{p_1 - 2} \nabla u^{m_1} \right) + u^{\beta_1}, & x \in R_+^N,\ t > 0, \\ v_t = \nabla \cdot \left(\left| \nabla v^{m_2} \right|^{p_2 - 2} \nabla v^{m_2} \right) + v^{\beta_2}, & x \in R_+^N,\ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

с нелинейными граничными условиями потока:

$$\begin{cases} -\left| \nabla u^{m_1} \right|^{p_1 - 2} \dfrac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1} = v^{q_1}, & x_1 = 0,\ t > 0, \\ -\left| \nabla v^{m_2} \right|^{p_2 - 2} \dfrac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1} = u^{q_2}, & x_1 = 0,\ t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

и начальными условиями:

$$u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ x \in R_+^N, \tag{3}$$

Параметры удовлетворяют условиям:

$$m_i > 1,\ p_i > 1 + 1/m_i,\ q_i > 0,\ \beta_i > 0 (i = 1,2), \text{ где } R_+^N = \left\{ (x_1, x') \mid x' \in R^{N-1},\ x_1 > 0 \right\}$$

Начальные функции $u_0(x), v_0(x)$ предполагаются неотрицательными, ограниченными, непрерывными и финитными (или достаточно быстро убывающими на бесконечности).

Определение. Пусть $\Omega = R_+^N$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Gamma = \partial\Omega = \{x_1 = 0\}$. Пара функций $(u,v) \geq 0$ рассматривается как обобщенное решение для (1)–(3) в Q_T если $u \in C(Q_T), v \in C(Q_T)$, $\left| \nabla u^{m_1} \right|^{p_1 - 2} \nabla u^{m_1} \in C(Q_T)$, $\left| \nabla v^{m_2} \right|^{p_2 - 2} \nabla v^{m_2} \in C(Q_T)$, для любых тестовых функций $\varphi, \psi \in C_0^{\infty}\left(\Omega \times [0,T)\right)$, $\varphi, \psi \geq 0$ выполняется интегральное тождество:

$$\begin{cases} \int_0^T \int_\Omega \left(-u\varphi_t + \left| \nabla u^{m_1} \right|^{p_1 - 2} \nabla u^{m_1} \nabla \varphi \right) dxdt + \int_0^T \int_\Gamma v^{q_1} \varphi dSdt = \int_0^T \int_\Omega u^{\beta_1} \varphi dxdt + \int_\Omega u_0 \varphi(x,0) dx \\ \int_0^T \int_\Omega \left(-v\psi_t + \left| \nabla v^{m_2} \right|^{p_2 - 2} \nabla v^{m_2} \nabla \psi \right) dxdt + \int_0^T \int_\Gamma u^{q_2} \psi dSdt = \int_0^T \int_\Omega v^{\beta_2} \psi dxdt + \int_\Omega v_0 \psi(x,0) dx \end{cases}$$

Системы нелинейно связанных дифференциальных уравнений в частных производных широко используются для описания математических моделей нелинейной диффузии в работах [8-10]. Для исследования качественных характеристик системы диффузии, которая является нелинейной и имеет нелинейные граничные условия, был использован автомодельный анализ и метод эталонных уравнений.

Основные результаты

Ниже доказываются несколько теорем о глобальной разрешимости задачи и о возникновении режимов с обострением (разрушении решений за конечное время).

Введём вспомогательные автомодельные функции типа Баренблатта:

$$g_i(\eta) = \left(C_i - b_i \eta^{\frac{p_i}{p_i - 1}} \right)_+^{\nu_i}, \quad \nu_i = \frac{p_i - 1}{m_i (p_i - 1) - 1} \tag{4}$$

где g_i и $\eta g_{i'}$ определяются как:

$$\Delta_{p_i} g_i^{m_i} = B_i (N g_i + \eta g_{i'}),\ \text{где}\ B_i = \left(m_i \nu_i \frac{p_i}{p_i - 1} b_i \right)^{p_i - 1} \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть начальные функции $u_0(x), v_0(x) \in L^{\infty}(R_+^N)$ являются финитными, непрерывными и неотрицательными. Если параметры системы удовлетворяют условиям:

$$\beta_i > m_i (p_i - 1) + \frac{p_i}{N}, i = 1,2;\ \text{и}\ q_1 q_2 > m_1 m_2 (p_1 - 1)(p_2 - 1)$$

то решение задачи (1)-(3) является глобальным при всех $t > 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы построим верхнее решение задачи, используя автомодельные функции с пространственным и временным сдвигами. Рассмотрим функции:

$$\overline{u}(x,t) = (T + t)^{-\gamma_1} g_1(\eta), \quad \overline{v}(x,t) = (T + t)^{-\gamma_2} g_2(\eta), \tag{6}$$

где многомерная пространственная переменная η введена с учетом сдвига $h>0$ вдоль нормальной координаты x_1:

$$\eta=\sqrt{\left(x_1(T+t)^{-\sigma}+h\right)^2+\sum_{i=2}^{N}\left(x_i(T+t)^{-\sigma}\right)^2} \tag{7}$$

Подставим функцию (6) $\bar{u}(x,t)$ в (1). Выбирая параметр b_1 таким образом, чтобы выполнялось равенство $B_1=\sigma$, сокращаем градиентных слагаемых, содержащих $\eta g_{1'}$ и получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial t}-\Delta_{p_1}\bar{u}^{m_1}=(T+t)^{-\gamma_1-1}\left(-\gamma_1 g_1-\sigma\eta g_{1'}-\sigma(Ng_1+\eta g_{1'})\right)=(T+t)^{-\gamma_1-1}(\sigma N-\gamma_1)g_1\\ \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial t}-\Delta_{p_2}\bar{v}^{m_2}=(T+t)^{-\gamma_2-1}\left(-\gamma_2 g_2-\sigma\eta g_2-\sigma(Ng_2+\eta g_2)\right)=(T+t)^{-\gamma_2-1}(\sigma N-\gamma_2)g_2\end{cases}$$

Согласно условиям теоремы $\beta_1>m_1(p_1-1)+p_1/N$, коэффициент $(\sigma N-\gamma_1)$ строго положителен. Для того чтобы построенная функция являлась верхним решением, полученное выражение должно служить верхней оценкой для нелинейного источника $\bar{u}^{\beta_1}=(T+t)^{-\gamma_1\beta_1}g_1^{\beta_1}$. Учитывая, что $\gamma_1+1=\gamma_1\beta_1$, неравенство сводится к виду:

$$\begin{cases}(\sigma N-\gamma_1)g_1\geq g_1^{\beta_1}\\ (\sigma N-\gamma_2)g_2\geq g_2^{\beta_2}\end{cases} \tag{8}$$

Поскольку $\beta_i>1$, данное неравенство справедливо для всех допустимых значений η при выборе достаточно малой константы C_i.

Вычислим нормальную производную от функции $\bar{u}^{m_1}$ на границе полупространства $x_1=0$, где выполняется условие $\eta\geq h$:

$$\begin{aligned}-\left|\frac{\partial\bar{u}^{m_1}}{\partial x_1}\right|^{p_1-2}\frac{\partial\bar{u}^{m_1}}{\partial x_1}&=(T+t)^{-[\gamma_1 m_1(p_1-1)+\sigma(p_1-1)]}\left(B_1\frac{h^{p_1-1}}{\eta^{p_1-2}}g_1(\eta)\right)\\ -\left|\frac{\partial\bar{v}^{m_2}}{\partial x_1}\right|^{p_2-2}\frac{\partial\bar{v}^{m_2}}{\partial x_1}&=(T+t)^{-[\gamma_2 m_2(p_2-1)+\sigma(p_2-1)]}\left(B_2\frac{h^{p_2-1}}{\eta^{p_2-2}}g_2(\eta)\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Чтобы граничное условие выполнялось в форме неравенства для верхнего решения, необходимо, чтобы полученный поток был не меньше функции $\bar{v}^{q_1}=(T+t)^{-\gamma_2 q_1}g_2^{q_1}(\eta)$. Сравнивая показатели степеней при временном множителе $(T+t)$, получаем условие:

$$\gamma_2 q_1\geq\gamma_1 m_1(p_1-1)+\sigma(p_1-1) \tag{10}$$

Проводя симметричные рассуждения для потока функции $\bar{v}$ на границе $x_1=0$, приходим ко второму условию:

$$\gamma_1 q_2\geq\gamma_2 m_2(p_2-1)+\sigma(p_2-1) \tag{11}$$

Перемножая эти два неравенства(10) и (11), учитывая строгую положительность параметров γ_i и σ, приходим к необходимому условию на показатели нелинейности:

$$q_1 q_2>m_1 m_2(p_1-1)(p_2-1) \tag{12}$$

При выполнении данного условия система неравенств на границе совместна, и требуемые оценки выполняются при достаточно больших значениях параметра T.

Поскольку функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$ финитны и их нормы ограничены достаточно малым числом δ, выбор достаточно большого временного сдвига $T>0$ гарантирует выполнение неравенств $\bar{u}(x,0)\geq u_0(x)$ и $\bar{v}(x,0)\geq v_0(x)$ на всём пространстве R_+^N.

Следовательно, функции $\bar{u}(x,t)$ и $\bar{v}(x,t)$ образуют глобальное верхнее решение исследуемой задачи. В силу теоремы сравнения, точное решение задачи ограничено сверху этим решением и, таким образом, решение является глобальным по времени.

Теорема 2. Пусть $\beta_1,\beta_2>1$. Для достаточно больших начальных функций $u_0(x),v_0(x)\geq 0$ решение задачи (1)-(3) имеет режим с обострением за конечное время $T<\infty$:

$$\lim_{t\to T^-}\left(\| u(\cdot,t)\|_\infty + \| v(\cdot,t)\|_\infty\right) = +\infty$$

Доказательство. Построим нижнее решение в виде:

$$\underline{u}(x,t) = (T-t)^{-\gamma_1} A_1\psi_1(\xi), \quad \underline{v}(x,t) = (T-t)^{-\gamma_2} A_2\psi_2(\xi),\ \xi = x_1(T-t)^{-\sigma} \tag{13}$$

где: $\gamma_i = \dfrac{1}{\beta_i - 1}$., $\psi_i(\xi) \geq 0$ финитны, при этом $\psi_i(0) > 0$ и $\psi_{i'}(0) < 0$.

Условие нижнего решения для первого уравнения:

$$\mathrm{L}(\underline{u}) = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left|\frac{\partial \underline{u}^{m_1}}{\partial x_1}\right|^{p_1-2}\frac{\partial \underline{u}^{m_1}}{\partial x_1}\right) - \underline{u}^{\beta_1} \leq 0 \tag{14}$$

Вычисляем производную по времени (с учётом дифференцирования сложной функции $(T-t)^{-1}$):

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = (T-t)^{-\gamma_1-1} A_1\left(\gamma_1\psi_1(\xi) + \sigma\xi\psi_{1'}(\xi)\right) \tag{15}$$

Подставляем (15) в (14) с учётом баланса временных экспонент:

$$(T-t)^{-\gamma_1-1} A_1\left[\gamma_1\psi_1 + \sigma\xi\psi_{1'} - A_1^{m_1(p_1-1)-1}\Delta_{p_1}(\psi_1^{m_1}) - A_1^{\beta_1-1}\psi_1^{\beta_1}\right] \leq 0$$

Поскольку $\beta_1 > 1$, показатель $\beta_1 - 1 > 0$. При выборе сколь угодно большой амплитуды $A_1 \to +\infty$ отрицательное источниковое слагаемое $-A_1^{\beta_1-1}\psi_1^{\beta_1}$ безусловно доминирует над диффузией, обеспечивая $\mathrm{L}(\underline{u}) \leq 0$.

Проводим оценку граничного потока при $x_1 = 0$**.** Требование для границы:

$$-|\,\partial_{x_1}\underline{u}^{m_1}\,|^{p_1-2}\,\partial_{x_1}\underline{u}^{m_1} \leq \underline{v}^{q_1}.$$

Подстановка функций даёт алгебраическое условие на амплитуды A_1, A_2:

$$A_1^{m_1(p_1-1)}\left|(\psi_1^{m_1})'(0)\right|^{p_1-2}\left(-(\psi_1^{m_1})'(0)\right) \leq A_2^{q_1}\psi_2^{q_1}(0)$$

Фиксируя константы профилей $K_1, K_2 > 0$, получаем систему:

$$\begin{cases} K_1 A_1^{m_1(p_1-1)} \leq A_2^{q_1} \\ K_2 A_2^{m_2(p_2-1)} \leq A_1^{q_2} \end{cases} \tag{16}$$

В отличие от теоремы 1, здесь амплитуды константы A_1, A_2 1 велики.

Из первого неравенства системы (16) выразим $A_1 \sim A_2^{\frac{q_1}{m_1(p_1-1)}}$ и подставим во второе:

$$A_2^{m_2(p_2-1)} \leq C\cdot\left(A_2^{\frac{q_1}{m_1(p_1-1)}}\right)^{q_2} = C\cdot A_2^{\frac{q_1q_2}{m_1(p_1-1)}} \tag{17}$$

Для бесконечно больших величин неравенство $A_2^x \leq A_2^y$ справедливо только при $x \leq y$:

$$m_2(p_2-1) \leq \frac{q_1q_2}{m_1(p_1-1)} \Rightarrow q_1q_2 \geq m_1m_2(p_1-1)(p_2-1) \tag{18}$$

Теперь выбираем A_1, A_2 достаточно большими, а $T > 0$ — достаточно малым. Тогда $\underline{u}(x,0) \leq u_0(x)$, $\underline{v}(x,0) \leq v_0(x)$ для достаточно больших начальных данных. По принципу сравнения $u(x,t) \geq \underline{u}(x,t), \quad v(x,t) \geq \underline{v}(x,t)$. Поскольку $\gamma_i = \dfrac{1}{\beta_i - 1} > 0$, имеем $\underline{u}(0,t) = A_1(T-t)^{-\gamma_1}\psi_1(0) \to +\infty$, и аналогично $\underline{v}(0,t) = A_2(T-t)^{-\gamma_2}\psi_2(0) \to +\infty$ при $\to T^-$. Следовательно, $\lim_{t\to T^-}\left(\| u(\cdot,t)\|_\infty + \| v(\cdot,t)\|_\infty\right) = +\infty$. Таким образом, решение имеет обострение за конечное время**.**

Автомодельный анализ задачи

Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде:

$$\begin{cases} u(x,t)=(T+t)^{-\gamma_1} f(\xi) \\ v(x,t)=(T+t)^{-\gamma_2} g(\xi) \end{cases}, \quad \xi=|\zeta|,\ \zeta_i=(1+x_i)(T+t)^{-\sigma},\ i=1,\ldots,N, \quad (19)$$

где $\gamma_1=\dfrac{1}{\beta_1-1}$, $\gamma_2=\dfrac{1}{\beta_2-1}$, $\sigma=\dfrac{\beta_1-m_1(p_1-1)}{p_1(\beta_1-1)}=\dfrac{\beta_2-m_2(p_2-1)}{p_2(\beta_2-1)}$,

$$(p_1-1)(m_1\gamma_1+\sigma)=q_1\gamma_2, \quad (p_2-1)(m_2\gamma_2+\sigma)=q_2\gamma_1,$$

следовательно систему можно написать в виде:

$$\begin{cases} \left(\left|\left(f^{m_1}\right)'\right|^{p_1-2}\left(f^{m_1}\right)'\right)'+\dfrac{N-1}{\xi}\left|\left(f^{m_1}\right)'\right|^{p_1-2}\left(f^{m_1}\right)'+\sigma\xi f'+\gamma_1 f+f^{\beta_1}=0, \\ \left(\left|\left(g^{m_2}\right)'\right|^{p_2-2}\left(g^{m_2}\right)'\right)'+\dfrac{N-1}{\xi}\left|\left(g^{m_2}\right)'\right|^{p_2-2}\left(g^{m_2}\right)'+\sigma\xi g'+\gamma_2 g+g^{\beta_2}=0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} -\left|\left(f^{m_1}\right)'\right|^{p_1-2}\left(f^{m_1}\right)'(1)=g^{q_1}(1) \\ -\left|\left(g^{m_1}\right)'\right|^{p_1-2}\left(g^{m_1}\right)'(1)=f^{q_2}(1) \end{cases}. \quad (21)$$

Используя метод эталонных уравнений, получим следующее верхнее решение задачи (20)-(21)

$$\begin{cases} f(\xi)=\left(a_1-b_1\xi^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right)^{\frac{p_1-1}{1+m_1(p_1-1)-\beta_1}}, \\ g(\xi)=\left(a_2-b_2\xi^{\frac{p_2}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2}{1+m_2(p_2-1)-\beta_2}}, \end{cases} \quad (22)$$

где $a_i>0\ (i=1,2)$, $b_1=\dfrac{m_1(p_1-1)-1}{m_1p_1}\beta_1^{\frac{1}{p_1-1}}>0$, $b_2=\dfrac{m_2(p_2-1)-1}{m_2p_2}\beta_2^{\frac{1}{p_2-1}}>0$.

Теорема 3. В окрестности свободных границ при $\xi\to\xi_{0,i}=(a_i/b_i)^{\frac{p_i-1}{p_i}}$ $(i=1,2)$ решение системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (20) имеет строгую асимптотику:

$$f(\xi)=e_1 f(\xi)(1+o(1)), \quad g(\xi)=e_2\ g(\xi)(1+o(1)),$$

где $f(\xi)$ и $g(\xi)$ - автомодельные функции, определённые в (22), а константы $e_1,e_2>0$ являются нетривиальными корнями нелинейных алгебраических уравнений:

$$(m_i\nu_i)^{p_i-1}e_i^{m_i(p_i-1)-1}-\sigma\left(\frac{p_i-1}{p_ib_i}\right)^{p_i-1}=0, \quad i=1,2.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом, подробно описанным в работе [10].

Численное моделирование системы диффузии.

Данный раздел посвящён численным экспериментам и визуализацию задачи (1)-(3) для случая $N=2$.

$$\begin{cases} u_t=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(D_1\dfrac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(D_1\dfrac{\partial u^{m_1}}{\partial x_2}\right)+u^{\beta_1} \\ v_t=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(D_2\dfrac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(D_2\dfrac{\partial v^{m_2}}{\partial x_2}\right)+v^{\beta_2} \end{cases} \quad (x_1,x_2)\in R_+^2, t>0. \quad (23)$$

С граничными условиями:

$$\begin{cases} -D_1 \dfrac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = v^{q_1}(0,x_2,t), \\ -D_2 \dfrac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = u^{q_2}(0,x_2,t), \end{cases} \quad x_2 \in R_+, t>0. \tag{24}$$

И начальными условиями:

$$u(x_1,x_2,0)=u_0(x_1,x_2)\geq 0,\ \ v(x_1,x_2,0)=v_0(x_1,x_2)\geq 0,\quad (x_1,x_2)\in R_+^2, \tag{25}$$

где для краткости введены коэффициенты нелинейной диффузии:

$$D_1=\left(\left(\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u^{m_1}}{\partial x_2}\right)^2\right)^{\frac{p_1-2}{2}},\ D_2=\left(\left(\frac{\partial v^{m_2}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v^{m_2}}{\partial x_2}\right)^2\right)^{\frac{p_2-2}{2}} \tag{26}$$

Здесь $u=u(x_1,x_2,t), v=v(x_1,x_2,t)$

Для численного решения этой задачи мы используем один из методов переменного направления - продольно-поперечную разностную схему, или схему Писмена-Рекфорда. В данном методе при переходе со слоя k на слой $k+1$ используется ещё один, промежуточный слой $k+1/2$. Для численного решения задачи (23)–(25) мы используем неявную схему. Разрешение сильной двойной нелинейности осуществляется с помощью итерационного метода Пикара на каждом дробном шаге.

В результате система (23) и (25) преобразуется:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{u}_{i,j}^{s+1}-u_{i,j}}{0.5h_t}=\dfrac{1}{h_1^2}\left[a_{i+1,j}\left(\overline{\overline{u}}\right)\left(\overline{u}_{i+1,j}^{s+1}-\overline{u}_{i,j}^{s+1}\right)-a_{i,j}\left(\overline{\overline{u}}\right)\left(\overline{u}_{i,j}^{s+1}-\overline{u}_{i-1,j}^{s+1}\right)\right]+\left(u_{i,j}^{s}\right)^{\beta_1} \\ \dfrac{\overline{v}_{i,j}^{s+1}-v_{i,j}}{0.5h_t}=\dfrac{1}{h_2^2}\left[c_{i+1,j}\left(\overline{\overline{v}}\right)\left(\overline{v}_{i+1,j}^{s+1}-\overline{u}_{i,j}^{s+1}\right)-c_{i,j}\left(\overline{\overline{v}}\right)\left(\overline{v}_{i,j}^{s+1}-\overline{v}_{i-1,j}^{s+1}\right)\right]+\left(v_{i,j}^{s}\right)^{\beta_2}, \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{\overline{u}}_{i,j}^{s+1}+\overline{u}_{i,j}}{0.5h_t}=\dfrac{1}{h_1^2}\left[b_{i+1,j}\left(\overline{\overline{u}}\right)\left(\overline{\overline{u}}_{i+1,j}^{s+1}-\overline{\overline{u}}_{i,j}^{s+1}\right)-b_{i,j}\left(\overline{\overline{u}}\right)\left(\overline{\overline{u}}_{i,j}^{s+1}-\overline{\overline{u}}_{i-1,j}^{s+1}\right)\right]+\left(\overline{u}_{i,j}^{s}\right)^{\beta}, \\ \dfrac{\overline{\overline{v}}_{i,j}^{s+1}-\overline{v}_{i,j}}{0.5h_t}=\dfrac{1}{h_2^2}\left[d_{i+1,j}\left(\overline{\overline{v}}\right)\left(\overline{\overline{v}}_{i+1,j}^{s+1}-\overline{\overline{v}}_{i,j}^{s+1}\right)-d_{i,j}\left(\overline{\overline{v}}\right)\left(\overline{\overline{v}}_{i,j}^{s+1}-\overline{\overline{v}}_{i-1,j}^{s+1}\right)\right]+\left(\overline{v}_{i,j}^{s}\right)^{\beta_2}, \end{cases} \tag{28}$$

Подстановка линеаризации в разностные уравнения сводит задачу на каждом полушаге к решению одномерных линейных систем с трёхдиагональными матрицами с помощью метода прогонки. Сначала используем продольную прогонку вдоль строк (направление x_1, индекс i) а потом поперечную прогонку вдоль столбцов (направление x_2, индекс j).

Итерации по индексу s на каждом полушаге продолжаются до выполнения критерия совместной сходимости по обеим сеточным функциям с заданной точностью $\varepsilon=10^{-4}$:

$$\begin{cases} \max_{i,j}\left|\overline{u}_{i,j}^{s+1}-\overline{u}_{i,j}^{s}\right|<\varepsilon \\ \max_{i,j}\left|\overline{v}_{i,j}^{s+1}-\overline{v}_{i,j}^{s}\right|<\varepsilon \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \max_{i,j}\left|\overline{\overline{u}}_{i,j}^{s+1}-\overline{\overline{u}}_{i,j}^{s}\right|<\varepsilon \\ \max_{i,j}\left|\overline{\overline{v}}_{i,j}^{s+1}-\overline{\overline{v}}_{i,j}^{s}\right|<\varepsilon \end{cases}$$

Для визуализации данного процесса и получения численных результатов мы воспользуемся языком программирования Python. В качестве начального приближения для случая медленной диффузии выбрана следующая функция:

$$\begin{cases} u(x_1,x_2,0)=T^{-\gamma_1}\left(a_1-b_1\left[\sqrt{(1+x_1)^2+x_2^2}\,T^{-\sigma}\right]^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right)_+^{\nu_1}\Bigg|_{x_1=0}, \\ v(x_1,x_2,0)=T^{-\gamma_2}\left(a_2-b_2\left[\sqrt{(1+x_1)^2+x_2^2}\,T^{-\sigma}\right]^{\frac{p_2}{p_2-1}}\right)_+^{\nu_2}\Bigg|_{x_1=0}, \end{cases}$$

Здесь $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

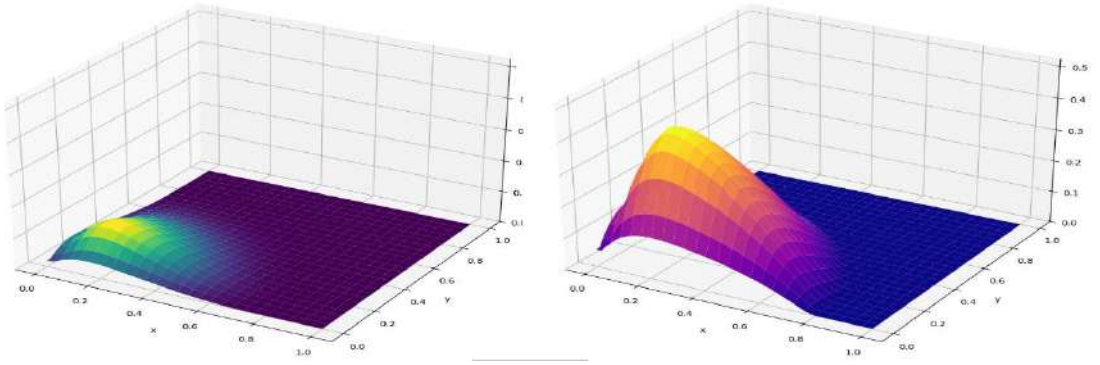


Рисунок 1. Графики функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ в момент времени $t=0.004$.

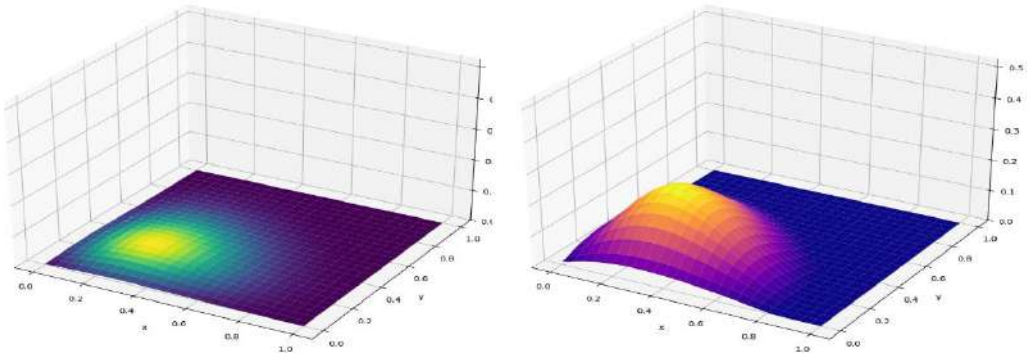


Рисунок 2. Графики функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ в момент времени $t=0.03$.

На рисунках 1 и 2. приведены графики решений при численных параметрах $m_1=1.5$, $m_2=2.0$, $p_1=2.1$, $p_2=2.5$, $\beta_1=1.0$, $\beta_2=1.5$, $q_1=2.1$, $q_2=2.5$.

Заключение. В данном исследовании было реализовано получение решения типа Зельдовича–Баренблатта для диффузионной системы. Тем не менее, в ходе анализа было выявлено, что в случаях нелинейной диффузии, при вырожденных параболических системах с нелинейными граничными условиями, глобальные решения могут отсутствовать при определённых числовых значениях параметров. Этот факт подчёркивает необходимость более глубокого и комплексного анализа задачи диффузии с источником.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Vázquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Oxford University Press, 2007. 624 p

2. Aronson, D. G. (1985). The porous medium equation. In: Fasano, A., Primicerio, M. (eds) Nonlinear Diffusion Problems. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1224, pp. 1–46. https://doi.org/10.1007/BFb0072687

3. Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, Section IA, Mathematics. 1966. Vol. 13. P. 109–124.

4. Carrillo J. A., Shu R. A survey on nonlinear cross-diffusion equations and their numerical analysis // Mathematics. 2024. Vol. 12, No. 5. Art. 742. DOI: 10.3390/math12050742.

5. Wang J., Wang L. Global existence and blow-up of solutions to a doubly nonlinear diffusion equation with variable exponent // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2024. Vol. 79. Art. 104102. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104102.

6. Ferreira R., de Pablo A. Critical Fujita exponents for doubly nonlinear equations // Nonlinear Analysis. 2023. Vol. 231. Art. 113267. DOI: 10.1016/j.na.2023.113267.

7. Mukhamadiyev A., Urunbaev J., Bobokandov M., Rakhmonov Z., Khujakulov T. A self-similar analysis of the solutions to the cross-diffusion system // Mathematics. 2026. Vol. 14, No. 1. Art. 83. DOI: 10.3390/math14010083

8. Rakhmonov, Z. R., Yarmetova, D. I. (2025). Existence and life span estimate for the solution to the nonlinear diffusion problem with boundary flux. Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol. 8, No. 6, pp. 185–197.

9. Rakhmonov Z. R., Yarmetova D. I., Mamatkulova M. Analytical analysis of one nonlinear diffusion problem with a source specified by nonlinear boundary conditions in multidimensional space // International Journal of Applied Mathematics. 2025. Vol. 38, No. 1S. P. 974–986. DOI: 10.12732/ijam.v38i1s.56.

10.Rakhmonov Z., Alimov A., Urunbaev J. On the behavior of solutions for a system of multidimensional diffusion equations with nonlinear boundary conditions // AIP Conference Proceedings. 2024. Vol. 3085, No. 1. Art. 020020 https://doi.org/10.1063/5.0194896