UO‘K 514.75

YEVKLID VA LOBACHEVSKIY TEKISLIKLARINING GEODEZIK CHIZIQLARI

Qurbonov Ergash Qurolovich,
Jizzax davlat pedagogika universiteti
Matematika kafedrasi dotsenti
ergash_qurbonov68@mail.ru

Annotatsiya. *Maqola Yevklid va Lobachevskiy tekisliklarining geodezik chiziqlarini Puankare diski modeli misolida aniqlashga bag‘ishlangan. Yevklid tekisligining va Lobachevskiy tekisligining Puankare diski modellarining klassik metrikalari keltirilgan hamda Eyler-Lagranj tenglamalarini tadbiq etish orqali metrikani minimallashtiruvchi geodezik chiziqlar topilgan. Natijada Yevklid tekisligining geodezik chiziqlari faqat to‘g‘ri chiziqlar ekanligi Lobachevskiy tekisliklarining Puankare diski modelidagi geodezik chiziqlar koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar hamda aylana yoylaridan iborat ekanligi ko‘rsatilgan.*

Kalit so‘zlar: *Yevklid tekisligining metrikasi, Puankare diski modellarining klassik metrikasi, geodezik chiziqlar, Eyler-Lagranj tenglamasi, birlik doira, asosiy tushunchalar, nuqta, to‘g‘ri chiziq.*

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ЕВКЛИДОВОЙ И ЛОБАЧЕВСКОЙ ПЛОСКОСТЕЙ

Аннотация. *Статья посвящена определению геодезических линий плоскостей Евклида и Лобачевского на примере модели диска Пуанкаре. Приведены классические метрики моделей диска Пуанкаре Евклидовой и плоскости Лобачевского. С использованием уравнений Эйлера–Лагранжа найдены геодезические линии, минимизирующие метрику. В результате показано, что геодезическими линиями Евклидовой плоскости являются только прямые линии, тогда как геодезические линии плоскости Лобачевского в модели диска Пуанкаре состоят из прямых линий, проходящих через начало координат, а также дуги окружностей, ортогональных граничной окружности единичного диска.*

Ключевые слова: *метрика Евклидовой плоскости, классическая метрика модели диска Пуанкаре, геодезические линии, уравнение Эйлера–Лагранжа, единичный диск, основные понятия, точка, прямая.*

GEODESIC LINES OF THE EUCLIDEAN AND LOBACHEVSKIAN PLANES

Abstract. *This article is devoted to determining the geodesic lines of the Euclidean and Lobachevsky planes using the Poincaré disk model. The classical metrics of the Poincaré disk models of the Euclidean plane and the Lobachevsky plane are presented. By applying the Euler–Lagrange equations, the geodesic lines that minimize the metric are determined. As a result, it is shown that the geodesic lines of the Euclidean plane are exclusively straight lines, whereas the geodesic lines of the Lobachevsky plane in the Poincaré disk model consist of straight lines passing through the origin of coordinates and arcs of circles orthogonal to the boundary circle of the unit disk.*

Keywords: *metric of the Euclidean plane, classical metric of the Poincaré disk model, geodesic lines, Euler–Lagrange equation, unit disk, basic concepts, point, straight line.*

Kirish. Ko‘pxilliklarning geodezik chiziqlarini aniqlash avval ham hozir ham differensial geometriyaning dolzarb masalalaridan biri bo‘lgan. Har qanday ko‘pxilliklarning geodezik chiziqlari uning metrikasi yordamida aniqlanadi. Biroq, metrikaning o‘zi yetarli emas. Metrikani minimallashtiruvchi kuch bu Eyler-Lograng tenglamasidir. Maqolada keltirilgan metrikani Yevklid yoki Lobachevskiy tekisligidagi nuqtalar orasidagi masofani hisoblash formulasi bilan adashtirmaslik kerak. O‘quvchiga qulay bo‘lsin deb, maqolaning har ikki qismida ham bir xil struktura joriy etildi. Avvalo metrika keltirildi, bu metrikaga Eyler-Lagranj tenglamasi tadbiq etildi. Natijada turli xil ko‘rinishlardagi differensial tenglamalar hosil bo‘ldi. Tekislikning geodezik chiziqlarini aniqlashda tenglamalar to‘g‘ridan-to‘g‘ri yechilgan bo‘lsa, Lobachevskiy tekisligining geodezik chiziqlarini aniqlashda teorema shartida keltirilgan yechimlar hosil bo‘lgan tenglamalarni qanoatlantirishi ko‘rsatilgan. Differensial geometriya ko‘zi bilan qaraganda, tekislikning geodezik chiziqlari faqat to‘g‘ri chiziqlar Lobachevskiy tekisligining geodezik chiziqlarini esa ikki xil chiziqlardan iborat ekanligi ko‘rsatilgan. Maqolada ko‘pxilliklarning geodezik chiziqlari berilgan ikkita

nuqtalar orqali o‘tuvchi barcha chiziqlar ichida shu nuqtalar orasidagi bo‘lagining uzunligi eng kichik bo‘lgan chiziq sifatida qabul qilingan.

Adabiyotlar tahlili. 1. Mualliflar Puankare disk modelining giperbolik geometriya modeli ekanligini oddiy matematik mulohaza sifatida emas, balki kompyuter yordamida formal ravishda isbotlashadi. Puankare modeli kompleks proyektiv tekislikda formalizatsiya qilinadi. Ular modelda: giperbolik nuqtalar, giperbolik to‘g‘ri chiziqlar, masofa, kongruentlik, nuqtalarning kollinearligi, aylana, perpendikulyarlik, izometriyalar kabi asosiy tushunchalarni qat’iy aniqlagan.

Mualliflar Puankare diski modelida Tarski aksiomalarining deyarli barchasi bajarilishini, faqat Evklidning parallel aksiomasi bajarilmasligini ko‘rsatgan.

2. Mualliflar giperbolik konstruktsiyalar uchun elementar konstruktsiyalar va lemmalar bazasini tuzib, ulardan foydalanib konstruktsiyalarni avtomatik ravishda bajaradigan tizim yaratgan. Bundan tashqari, ular oddiy sirkul-chizg‘ich bilan bajarib bo‘lmaydigan, ammo algebraik hisoblashlar yordamida bajariladigan konstruktsiyalarni ham tizimga qo‘shgan. Shuningdek, dinamik geometriya kutubxonasi yordamida konstruktsiyalarning tavsifi, tasvirlari va bosqichma-bosqich animatsiyalari beriladigan onlayn to‘plam yaratilgan.

3. Bu maqolada hammamizga tanish bo‘lgan Pifagor teoremasining giperbolik geometriyadagi ko‘rinishi aniqlangan. Maqola aynan Puankare disk modelidagi giperbolik uchburchak va uning tomonlari o‘rtasidagi munosabatni o‘rganilgan. Bu yerda giperbolik masofa va giperbolik burchaklardan foydalanilgan Puankare diskidagi geometriyani oddiy Evklid koordinatalari bilan ifodalab, giperbolik masofa va giperbolik burchak tushunchalarini kiritganimizda, klassik teoremalar giperbolik shaklga o‘tgan.

4. Maqolada Puankare modelidan foydalanib giperbolik trigonometriya yaratilgan. Mualliflar giperbolik trigonometriya formulalarini shunchaki tayyor holda keltirmaganlar. Ularni Puankare modelining geometrik xossalaridan foydalanib keltirib chiqarganlar. Bundan tashqari Puankare diskida: giperbolik nuqtalar diskning ichidagi nuqtalar ekanligi, giperbolik to‘g‘ri chiziqlar esa disk chegarasiga ortogonal aylana yoylari yoki diametrlar ekanligi, burchaklar esa mos Evklid burchaklari, lekin masofalar giperbolik masofalar ekanligini aniqlab,

giperbolik sinus, kosinus va boshqa trigonometrik munosabatlarni hosil qilgan.

5. Maqolada mualliflar tomonidan giperbolik tekislikdagi uchburchaklarning, to‘rtburchaklarning yuzalarini hisoblash formulalari keltirib chiqarilgan. Bunda A. Ungar tomonidan kiritilgan girovektor tushunchalaridan foydalanilgan.

Tadqiqot metodologiyasi. Maqolada nazariy-matematik tadqiqot metodologiyasi qo‘llanilgan. Tadqiqotning asosiy usuli – variatsion hisob va differensial geometriya usuli. Dastlab Yevklid va giperbolik tekisliklarning mos metrikalari aniqlanadi. Ushbu metrikalar asosida egri chiziqning uzunlik funksionali tuzilgan. So‘ngra uzunlik funksionalini ekstremallashtirish masalasiga Eyler–Lagranj tenglamasi qo‘llanilib, geodezik chiziqlarning differensial tenglamalari hosil qilingan. Olingan tenglamalarni yechish orqali Yevklid va giperbolik tekisliklarning geodeziklari aniqlanadi hamda ularning geometrik xususiyatlari tahlil qilinadi.

Tahlil va natijalar. Tadqiqot davomida Yevklid va giperbolik tekisliklarning mos metrikalari asosida geodezik chiziqlarni aniqlash masalasi tahlil qilindi. Egri chiziq uzunligining funksionali tuzilib, unga Eyler–Lagranj tenglamasi qo‘llanildi. Natijada har ikkala geometriya uchun geodezik chiziqlarning differensial tenglamalari hosil qilindi.

Olingan natijalar Yevklid tekisligida geodeziklar to‘g‘ri chiziqlar ekanligini, giperbolik tekislikda esa geodeziklar tanlangan model metrikasiga bog‘liq maxsus egri chiziqlar ko‘rinishida namoyon bo‘lishini ko‘rsatdi. Shu tariqa geodezik chiziqlarning shakli tegishli tekislikning metrik xususiyatlari bilan bevosita bog‘liqligi aniqlandi.

Tahlil natijasida Eyler–Lagranj tenglamasi turli metrik fazolarda geodeziklarni aniqlashning samarali matematik vositasi ekanligi ko‘rsatildi. Yevklid va giperbolik holatlarni taqqoslash orqali metrikalarning geodeziklar shakliga ta’siri ham ochib berildi.

1. Yevklid tekisligining metrikasi va uning geodezik chiziqlari.

Lobachevskiy geometriyasini tushunish qulay bo‘lsin uchun ishni yevklid tekisligidagi geometriyadan boshladik. Yevklid tekisligida $M(x,y)$ va yetarlicha yaqin joylashgan $N(x+dx,y+dy)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. U holda bu ikki nuqta orasidagi $\rho(M,N)$ masofa:

$$\rho(M,N)=\sqrt{(x+dx-x)^2+(y+dy-y)^2}=\sqrt{dx^2+dy^2} \qquad (1.1)$$

(1.1) formuladan foydalanib tekislikdagi M va N nuqtalar orqali o‘tuvchi barcha chiziqlar chiziqlar ichida shu nuqtalar orasidagi yoyining (bo‘lagining) uzunligi eng kichik bo‘lgan chiziq

tenglamasini topamiz. Qulaylik uchun (1.1) formulani internet manbalarida hamda xorijiy adabiyotlarda keltirilgan

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (1.2)$$

ko‘rinishidan foydalanamiz. Bu erda $\rho^2(x,y) = ds^2$.

1.1 - ta’rif. (1.2) ifodaga yevklid tekisligining metrikasi deb ataladi.

M va N nuqtalar orqali o‘tuvchi chiziqlar oilasini $y_n = y_n(x)$ bilan belgilaymiz. n ning har bir natural qiymatiga M va N nuqtalar orqali o‘tuvchi yagona chiziq mos kelsin.

1.1-teorema. M va N nuqtalar orqali o‘tuvchi barcha chiziqlar ichida shu nuqtalar orasidagi yoyining uzunligi eng kichik bo‘lgan chiziq $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbot qilish uchun (1.2) metrikaga Eyler-Lagranj tenglamasini qo‘llaymiz. Faraz qilaylik, M va N nuqtalar orqali o‘tuvchi barcha chiziqlar ichida shu nuqtalar orasidagi yoyining uzunligi eng kichik bo‘lgan chiziq $y = y(x)$ bo‘lsin. U holda (1.2) metrika quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y = f(x) \Leftrightarrow dy = f'(x)dx,$$
$$ds^2 = dx^2 + (f'(x)dx)^2,$$
$$ds^2 = \left[1 + (f'(x))^2\right]dx^2,$$
$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Eyler-Lagranj tenglamasiga mos Lagranj funksiyasi sifatida

$$L(x, y, f, f') = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \qquad (1.3)$$

ifodani qabul qilamiz. Endi Eyler-Lagranj tenglamasini (1.3) ifodaga mos shaklda keltiramiz:

$$\frac{\partial L}{df} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) = 0 \qquad (1.4)$$

(1.3) dan ko‘rinib turibdiki, L Lagranj funksiyasi faqat f' ga va x ga bog‘liq. Bundan esa

$$\frac{\partial L}{df} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

kelib chiqadi. Topilganlarni (1.4) ga qo‘ysak:

$$0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\right) = 0 \qquad (1.5)$$

hosil bo‘ladi. (1.5) dan qavs ichidagi ifoda o‘zgarmas son ekanligi kelib chiqadi, yani

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = const, \qquad f'(x) = k.$$

Oxirgi tenglamadan $f(x)$ ni topamiz.

$$f(x) = kx + b$$

Demak, yevklid tekisligida berilgan ikkita M va N nuqtalar orqali o‘tuvchi barcha chiziqlar ichida shu nuqtalar orasidagi bo‘lagining uzunligi eng kichik bo‘lgan chiziq to‘g‘ri chiziq ekan. Aslida geodezik chiziq tushunchasi egriligi noldan farqli bo‘lgan sirt ustida yotgan chiziq bo‘ladi. Shundan kelib chiqadigan bo‘lsak, tekislikning geodezik chiziqlari to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lar ekan.

2. Puankare diski modelining metrikasi va uning geodezik chiziqlari.

Ma’lumki, noyevklid geometriya fani yaratilgandan keyin ham uzoq vaqt davomida olimlar tomonidan tan olinmadi. Buning asosiy sababi shu ediki uning zidsiz geometriya ekanligi hali isbot qilinmagan edi. Lobachevskiy geometriyasi zidsiz geometriya ekanligini birinchilardan o‘rgangan olimlar Beltrami, Kleyin va Anri Puankarelar edi. Uch o‘lchovli yevklid fazosida to‘laligicha regulyar holida

Lobachevskiy tekisligi mavjud emas. Ixtiyoriy nuqtasidagi Gauss egriligi manfiy bo‘lgan sirtlar Lobachevskiy tekisligining uch o‘lchovli yevklid fazosidagi bo‘laklariga misol bo‘ladi. Shuning uchun bu geometriyani uning modellarida o‘rganish ancha qulay. Quyida Lobachevskiy tekisligining Puankare diski modelining dekart talqinini keltiramiz. Bu modelda Lobachevskiy tekisligining nuqtalari sifatida yevklid tekisligidagi

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (2.1)$$

birlik aylana bilan chegaralangan doira nuqtalari qabul qilingan. Lobachevskiy tekisligining to‘g‘ri chiziqlari sifatida (2.1) aylana bilan to‘g‘ri burchak ostida kesishuvchi $x^2 + y^2 < 1$ doira ichida joylashgan aylana yoylari hamda koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar qabul qilingan. Shuningdek, (2.1) aylana yoyida yotgan nuqtalar Lobachevskiy tekisligining cheksiz uzoqlashgan nuqtalari sifatida qabul qilingan. Biroq barcha manbalarda nima uchun aylana yoylari va koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar qabul qilinganligi haqida ma’lumotlar keltirilmagan. Puankare modelining shartlariga ko‘ra (2.1) aylanada yotgan nuqtalar modelning cheksiz uzoqlashgan nuqtalari. U holda modelning metrikasi:

$$ds^2 = \frac{(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \qquad (2.2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Haqiqatdan, agar $x^2 + y^2 = 1$ bo‘lsa masofa cheksiz ortadi.

2.1-teorema. Birlik doira ichida joylashgan ixtiyoriy M va N nuqtalar orqali o‘tuvchi barcha chiziqlar ichida shu nuqtalar orasidagi bo‘lagining uzunligi eng kichik bo‘lgan (geodezik) chiziq markazi birlik doiradan tashqarida joylashgan (a,b) nuqtada, radiusi $R^2 = a^2 + b^2 - 1$ shartni qanoatlantiradigan

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

aylana va koordinatalar boshidan o‘tuvchi $y = kx$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘ladi.

Isbot. Izlanayotgan geodezik chiziq tenglamasini $y = f(x)$ ko‘rinishda bo‘lsin. Chiziq tenglamasidan $dy = y'dx$ ni topib metrika tenglamasidagi o‘rniga qo‘yamiz.

$$ds = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1 - x^2 - y^2}dx \Leftrightarrow s = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1 - x^2 - y^2}dx.$$

Lagranj funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$L = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1 - x^2 - y^2}$$

Endi topilgan Lagranj funksiyasiga mos keluvchi Eyler-Lagranj tenglamasini yozamiz:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad (2.4)$$

(2.3) Lagranj funksiyasi x, y, x', y' larga bog‘liq ekanligidan quyidagilarni topish mumkin.

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{(1 - x^2 - y^2)\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{2y\sqrt{1+y'^2}}{(1 - x^2 - y^2)^2} \qquad (2.5)$$

(2.5) larni (2.4) ga qo‘ysak hamda soddalashtirsak:

$$(1 - x^2 - y^2)y'' + 2(xy' - y)(1 + y'^2) = 0 \qquad (2.6)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (2.6) tenglama izlanayotgan geodezik chiziqlarning differensial tenglamasidir. U holda (2.6) tenglamani teoremada keltirilgan aylana va to‘g‘ri chiziq tenglamalari qanoatlantirishi kerak. Ishni to‘g‘ri chiziq tenglamasidan boshlaymiz.

$$y = kx \Leftrightarrow y' = k, \quad y'' = 0$$

Topilganlarni (2.6) ga qo‘yamiz:

$$(1 - x^2 - (kx)^2) \cdot 0 + 2(xk - kx)(1 + k^2) = 0$$

Demak, to‘g‘ri chiziq tenglamasi (2.6) ni qanoatlantirdi. Aylana tenglamasi ham (2.6) tenglamani qanoatlantirishini ko‘rsatish uchun aylana tenglamasidan $y,\ y',\ y''$ larni topib, (2.6) dagi o‘rinlariga qo‘yamiz.

$$y = b \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2}, \quad y' = -\frac{x-a}{y-b}, \quad y'' = -\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(y-b)^3} = -\frac{R^2}{(y-b)^3}.$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2}, \quad (1-x^2-y^2)y'' = (1-x^2-y^2)\left(-\frac{R^2}{(y-b)^3}\right) = -\frac{R^2(1-x^2-y^2)}{(y-b)^3}$$

$$xy' - y = -\frac{x^2 + y^2 - ax - by}{y-b}.$$

Barcha topilganlarni o‘rinlariga qo‘yib soddalashtiramiz:

$$-\frac{R^2(1-x^2-y^2)}{(y-b)^3} + 2\left(-\frac{x^2+y^2-ax-by}{y-b}\right)\left(1 + \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2}\right) = 0$$

Ikkinchi kasr suratini quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$x^2 + y^2 - ax - by = (x-a)^2 + (y-b)^2 + ax + by - a^2 - b^2 =$$
$$= R^2 - a^2 - b^2 + ax + by.$$

Teorema shartidan foydalansak $R^2 - a^2 - b^2 = -1.$

U holda ikkinchi kasr

$$-2\frac{ax + by - 1}{(y-b)}$$

Ko‘rinishga keladi. Shunga o‘xshash uchinchi kasrni ham soddalashtirish mumkin.

$$1 + \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(y-b)^2} = \frac{R^2}{(y-b)^2},$$

$$-\frac{R^2(1-x^2-y^2)}{(y-b)^3} - 2\frac{ax+by-1}{(y-b)}\frac{R^2}{(y-b)^2} = 0,$$

$$-\frac{R^2(1-x^2-y^2)}{(y-b)^3} - 2\frac{ax+by-1}{(y-b)}\frac{R^2}{(y-b)^2} = 0,$$

$$-\frac{(1-x^2-y^2)}{(y-b)^3} - \frac{2ax+2by-2}{(y-b)^3} = 0,$$

$$-1 + x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2 = 0,$$

$$[(x-a)^2 - a^2] + [(y-b)^2 - b^2] + 1 = 0,$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 + 1 = 0,$$

$$R^2 - a^2 - b^2 + 1 = 0.$$

Oxirgi ifoda teoremada keltirilgan shartdan iborat.

Demak, (2.2) metrikaning geodezik chiziqlari haqiqatdan aylana va to‘g‘ri chiziqlar ekan.

Teorema isbotlandi.

Xulosa va takliflar. Olingan natijalar geodezik chiziq tushunchasining tekislikning metrik tuzilishi bilan chambarchas bog‘liqligini ko‘rsatadi. Tadqiqotning nazariy natijalari Riman geometriyasi, giperbolik geometriya va variatsion hisob masalalarini o‘rganishda qo‘llanishi mumkin.

Kelgusida tadqiqotni boshqa giperbolik modellar, xususan, Puankarening yuqori yarimtekislik modellari uchun geodeziklarni aniqlash, shuningdek, olingan natijalarni kompyuter grafikasi va dinamik geometriya vositalari yordamida vizuallashtirish yo‘nalishida davom ettirish taklif etiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Simić, D., Marić, F., Boutry, P. Formalization of the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry. Journal of Automated Reasoning, 2021, 65(1), 31–73.

2. Marinković, V., Šukilović, T., Marić, F. Automated triangle constructions in hyperbolic geometry. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2023, 91(6), 821–849.

3. Ungar, A. A. The Hyperbolic Pythagorean Theorem in the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry. The American Mathematical Monthly, 1999, 106(8), 759–763.

4. Eves, H., Hoggatt Jr., V. E. Hyperbolic Trigonometry Derived from the Poincaré Model. The American Mathematical Monthly, 1951, 58(7), 469–474.

5. Balakan, G., Demirel, O. The Formulas of Möbius-Bretschneider and Möbius-Cagnoli in the Poincaré Disc Model of Hyperbolic Geometry. Al-Mustansiriyah Journal of Science, 2021, 32(1), 31–38.