УДК 517.956.6

К ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СМЕШАННОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Мамажонов Мирза,
профессор Кокандского государственного университета
mirzamamajonov@gmail.com
Шерматова Хилолахон Мирзаевна,
доцент кафедры Информационных технологий
Ферганского государственного университета
shermatovahilola1978@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5014-9549
Зокиржонова Мушарраф Отамирза кизи,
преподаватель кафедры Алгебры и анализа
факультета Физики и математики
Андижанского государственного университета

Аннотация. *В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в смешанной шестиугольной области, когда угловой коэффициент характеристики оператора первого порядка равен единице. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи с помощью метода построения решения, а также методами интегральных и дифференциальных уравнений, метода продолжения.*

Ключевые слова: *дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, метод продолжения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

PARABOLO-GIPERBOLIK TIPDAGI UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN ARALASH OLTI BURCHAKLI SOHADA BIR CHEGARAVIY MASALANI QO‘YISH VA TADQIQ ETISH

Annotatsiya. *Mazkur ishda birinchi tartibli operator xarakteristikasining burchak koeffitsiyenti birga teng bo‘lgan holda, parabolo-giperbolik tipdagi uchinchi tartibli tenglama uchun aralash oltiburchakli sohada bir chegaraviy masala qo‘yiladi va tadqiq etiladi. Qo‘yilgan masalaning bir qiymatli yechilishi yechimni qurish usuli, shuningdek, integral va differensial tenglamalar usullari hamda davom ettirish usuli yordamida isbotlanadi.*

Kalit so‘zlar: *differensial va integral tenglamalar, yechimni qurish usuli, davom ettirish usuli, chegaraviy masala, parabolo-giperbolik tip, bir qiymatli yechiluvchanlik.*

ON THE FORMULATION AND INVESTIGATION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED HEXAGONAL DOMAIN

Abstract. *This paper formulates and investigates a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed hexagonal domain, where the slope coefficient of the characteristic of the first-order operator is equal to one. The unique solvability of the formulated problem is proved by means of the solution construction method, as well as by the methods of integral and differential equations and the continuation method.*

Keywords: *differential and integral equations, solution construction method, continuation method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

Введение. В 70-80-годах прошлого века начали изучать различные задачи для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Такие задачи исследованы, в основном, Т.Д.Джураевым и его учениками (например, см. [1], [2]).

В настоящее время в широком плане развивалось изучение различных краевых задач для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа в различных смешанных областях с двумя и тремя линиями изменения типа (например, см. [3]-[11]).

В настоящей статье ставятся две краевые задачи, и исследуется одна из поставленных краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида:

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)\left(Lu\right)=0 \tag{1}$$

в шестиугольной области G плоскости xOy, где $Lu=\begin{cases}u_{1xx}-u_{1y}, & (x,y)\in G_1,\\ u_{ixx}-u_{iyy}, & (x,y)\in G_i \ \ (i=2,3),\end{cases}$

$a,b,c\in R$, $0<\dfrac{b}{a}\le 1$, $u(x,y)=u_i(x,y),(x,y)\in G_i$ $(i=1,2,3)$, а $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup$, $\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, то есть G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- четырёхугольник с вершинами в точках $B(1,0)$, $D(-1,0)$, $D_0(-1,-1)$, $C(0,-1)$; G_3- треугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $D(-1,0)$, $A_0(0,1)$; J_1, J_2, J_3- открытые отрезки с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$; $A(0,0)$, $D(-1,0)$; $A(0,0)$, $A_0(0,1)$ соответственно.

Постановка задачи

Задача 1. (Случай $0<b/a<1$). Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\ -1\le y\le 0, \tag{3}$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_4(y),\ -1\le y\le 0, \tag{4}$$

$$u_{xx}(-1,y)=\varphi_6(y),\ -1\le y\le 0, \tag{5}$$

$$u\big|_{BC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{6}$$

$$u(x,-1)=f_1(x),\ -1\le x\le 0, \tag{7}$$

$$u_{yy}(x,-1)=f_3(x),\ -1\le x\le 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DA_0}=\psi_2(x),\ -1\le x\le 0, \tag{9}$$

и условиям склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,-0)=u(x,+0)=T(x),\ -1\le x\le 1, \tag{10}$$

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0)=N(x),\ -1\le x\le 1, \tag{11}$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ x\in(-1,0)\cup(0,1), \tag{12}$$

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{13}$$

$$u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1. \tag{14}$$

$$u_{xx}(-0,y)=u_{xx}(+0,y)=\mu_3(y),\ 0<y<1. \tag{15}$$

Здесь $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_4,\varphi_6$, ψ_1,ψ_2, f_1,f_3 – заданные достаточно гладкие функции, а τ_i,ν_i,μ_i $(i=\overline{1,3})$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x-y=-1$, а

$$T(x)=\begin{cases}\tau_1(x),\ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0;\end{cases}\quad N(x)=\begin{cases}\nu_1(x),\ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0;\end{cases}\quad M(x)=\begin{cases}\mu_1(x),\ 0<x<1,\\ \mu_2(x),\ -1<x<0.\end{cases}$$

Задача 2 (Случай $\gamma=b/a=1$) отличается от задачи 1 лишь тем, что вместо уравнения (1) берется уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0, \tag{1'}$$

причём условие (9) снимается, а вместо условия (6) берётся условие:

$$u\big|_{CS}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1/2, \tag{6'}$$

и добавляется условие:

$$u_y(x,-1)=f_2(x),\ -1\le x\le 0, \tag{7'}$$

где $S(1/2,-1/2)$.

Здесь докажем следующую теорему:

Теорема. Если $\varphi_1\in C^3[0,1]$, $\varphi_2\in C^3[-1,0]$, $\varphi_4\in C^2[-1,0]$, $\varphi_6\in C^1[-1,0]$, $f_1\in C^3[-1,0]$, $f_2\in C^2[-1,0]$, $f_3\in C^1[-1,0]$, $\psi_1\in C^3[0,1/2]$, причём выполняются условия согласования $f_1(-1)=\varphi_2(-1)$, $\tau_1(1)=\varphi_1(0)$, $\tau_1(0)=\tau_2(0)$, $\tau_1'(0)=\tau_2'(0)$, то задача-2 допускает единственное решение при $\gamma=b/a=1$.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1') перепишем в виде:

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(x-y)e^{-cy},\ (x,y)\in G_1, \tag{16}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(x-y)e^{-cy},\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3), \tag{17}$$

где $u(x,y)=u_i(x,y)$, $(x,y)\in G_i$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$, причём $\omega_i(x-y)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Сначала исследование будем проводить в области G_2. Полагая в уравнение (17) $(i=2)$ $x=-1$ и $y=-1$ в силу условий (3), (5), (7), (8) и меняя аргументы $-1-y$ и $x+1$ в полученных равенствах на $x-y$, получим:

$$\omega_2(x-y)=\left[\varphi_6(y-1-x)-\varphi_2''(y-1-x)\right]e^{c(y-1-x)},\ -1\le x-y\le 0, \tag{18}$$

$$\omega_2(x-y)=\left[f_1''(x-1-y)-f_3(x-1-y)\right]e^{-c},\ 0\le x-y\le 1. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует $\varphi_6(-1)=f_1''(-1)$, $\varphi_2''(-1)=f_3(-1)$.

Далее, рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases}u_{2xx}-u_{2yy}=\Omega_2(x-y)e^{-cy},\\ u_2(x,0)=\overline{T}(x),\ u_{2y}(x,0)=\overline{N}(x),\ -2\le x\le 1,\\ u_2(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{2x}(-1,y)=\varphi_4(y),\ -1\le y\le 0,\\ u_2(x,-1)=f_1(x),\ u_{2y}(x,-1)=f_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ u_2\big|_{CS}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1/2,\end{cases}$$

где функции $\overline{T}(x)$, $\overline{N}(x)$ и $\Omega_2(x)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 1$ эти функции определяются так: $\overline{T}(x)=T(x)$, $\overline{N}(x)=N(x)$, $\Omega_2(x)=\omega_2(x)$, а в промежутке $-2\le x\le -1$ они пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям, кроме условий $u_2(x,-1)=f_1(x)$, $u_{2y}(x,-1)=f_2(x)$, $u_{2x}(-1,y)=\varphi_4(y)$, $u_2\big|_{CS}=\psi_1(x)$, будем искать в виде:

$$u_2(x,y)=u_{21}(x,y)+u_{22}(x,y)+u_{23}(x,y), \tag{20}$$

где $u_{21}(x,y)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} u_{21xx}-u_{21yy}=0, \\ u_{21}(x,0)=\overline{T}(x),\ u_{21y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{21}(-1,y)=\varphi_2(y),\ -1\le y\le 0; \end{cases} \tag{21}$$

$u_{22}(x,y)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} u_{22xx}-u_{22yy}=0, \\ u_{22}(x,0)=0,\ u_{22y}(x,0)=\overline{N}(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_{22}(-1,y)=0,\ -1\le y\le 0; \end{cases} \tag{22}$$

$u_{23}(x,y)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} u_{23xx}-u_{23yy}=\Omega_2(x-y)e^{-cy}, \\ u_{23}(x,0)=0,\ u_{23y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{23}(-1,y)=0,\ -1\le y\le 0. \end{cases} \tag{23}$$

Методом продолжения находим решения задач (21), (22) и (23). Они имеют вид:

$$u_{21}(x,y)=\frac{1}{2}\left[\overline{T}(x+y)+\overline{T}(x-y)\right], \tag{24}$$

$$u_{22}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\overline{N}(t)\,dt, \tag{25}$$

$$u_{23}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-c\eta}\,d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_2(\xi-\eta)\,d\xi, \tag{26}$$

где

$$\overline{T}(x)=\begin{cases} 2\varphi_2(1+x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1, \\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0, \\ \tau_1(x),\ 0\le x\le 1; \end{cases} \qquad \overline{N}(x)=\begin{cases} -\nu_2(-2-x),\ -2\le x\le -1, \\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0, \\ \nu_1(x),\ 0\le x\le 1. \end{cases}$$

$$\Omega_2(x-y)=\begin{cases} -3e^{-c(x-y+1)}\omega_2(y-2-x)+ \\ +\left[2\omega_2'(y-2-x)-c\omega_2(y-2-x)\right]\times \\ \times\displaystyle\int_0^{x-y+1}e^{-c\eta}\,d\eta,\ -2\le x-y\le -1, \\ \omega_2(x-y),\ -1\le x-y\le 1. \end{cases}$$

Подставляя (24), (25) и (26) в (20), имеем:

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[\overline{T}(x+y)+\overline{T}(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\overline{N}(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-c\eta}\,d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_2(\xi-\eta)\,d\xi. \tag{27}$$

Подставляя (27) в условие (6') после некоторых выкладок, получим первое соотношение между неизвестными следами решения на линии изменения типа J_1:

$$\tau_2'(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0, \tag{28}$$

где $\alpha_1(x)$ – известная функция.

Подставляя (27) в условия (3) и (4), после длинных вычислений и преобразований, получим второе соотношение между неизвестными следами решения на линии изменения типа J_1 (при $-1 \le x \le 0$):

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \delta_1(x),\ -1 \le x \le 0, \tag{29}$$

где $\delta_1(x)-$ известная функция.

Из (28) и (29) находим:

$$\tau_2'(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) + \delta_1(x)\right],\ \ \nu_2(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(x) - \delta_1(x)\right]. \tag{30}$$

Интегрируя первое из равенств (30) от -1 до x, получим:

$$\tau_2(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t) + \delta_1(t)\right]dt + \varphi_2(0), \tag{31}$$

где $\tau_2(-1) = \varphi_2(0)$.

Дифференцируя (27) по x и y, затем переходя к пределу при $y \to -1$ и беря разность этих полученных соотношений, получим соотношение относительно $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$:

$$\tau_1'(x) - \nu_1(x) = \alpha_2(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{32}$$

где $\alpha_2(x)-$ известная функция.

Применяя оператор $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + c$ к уравнению (16) и переходя в полученном уравнении к пределу при $y \to 0$, получим второе соотношение между неизвестными следами решения $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\tau_1'''(x) + \nu_1''(x) + c\tau_1''(x) - \nu_1'(x) - \mu_1(x) - c\nu_1(x) = 0,\ 0 \le x \le 1.$$

Затем, переходя в уравнении (17) $(i = 2)$ к пределу при $y \to 0$, получим:

$$\mu_1(x) = \tau_1''(x) - \omega_2(x), 0 \le x \le 1.$$

Исключая из этих последних двух соотношений и (32) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, приходим к уравнению:

$$\tau_1''(x) - \left(1 - \frac{c}{2}\right)\tau_1'(x) - \frac{c}{2}\tau_1(x) = \alpha_3(x) + k_1,\ 0 \le x \le 1, \tag{33}$$

где $\alpha_3(x)-$ известная функция, а k_1-неизвестная пока постоянная.

Здесь могут быть три случая: а) $c \ne -2$, $c \ne 0$; б) $c = -2$; в) $c = 0$.

Каждый случай будем рассмотреть отдельно.

В случае а) решая уравнение (33) при условиях (см. (30). (31))

$$\tau_1(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t) + \delta_1(t)\right]dt + \varphi_2(0),\ \ \tau_1'(0) = \frac{1}{2}\left[\alpha_1(0) + \delta_1(0)\right],\ \tau_1(1) = \varphi_1(0), \tag{34}$$

находим

$$\tau_1(x) = \frac{2}{c+2}\int_0^x\left[e^{\frac{c}{2}(t-x)} - e^{x-t}\right]\alpha_3(t)\,dt - \frac{2k_1}{c+2}\left[e^x - 1 + \frac{c}{2}\left(e^{-\frac{c}{2}x} - 1\right)\right] + k_2e^x + k_3e^{-\frac{c}{2}x},$$

где k_1, k_2, k_3-уже известные числа.

б) В этом случае уравнение (33) имеет вид:

$$\tau_1''(x) - 2\tau_1'(x) + \tau_1(x) = \alpha_3(x) + k_1,\ 0 \le x \le 1.$$

Решая это уравнение при условиях (34), находим:

$$\tau_1(x) = \int_0^x (x-t)e^{x-t}\alpha_3(t)\,dt + k_1\left[(x-1)e^x + 1\right] + (k_2 + k_3x)e^x,$$

где k_1, k_2, k_3 – уже известные числа.

Наконец, рассмотрим случай в). В этом случае уравнение (33) имеет вид:

$$\tau_1''(x)-\tau_1'(x)=\alpha_3(x)+k_1,\ 0\le x\le 1.$$

Интегрируя последнее уравнение от 0 до x, имеем:

$$\tau_1'(x)-\tau_1(x)=\alpha_4(x)+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где $\alpha_4(x)$ – известная функция, а k_1 и k_2 – произвольные постоянные.

Решая последнее уравнение при условиях (34), находим:

$$\tau_1(x)=\int_0^x e^{x-t}\alpha_4(t)\,dt+k_1\left(e^x-1-x\right)+k_2\left(e^x-1\right)+k_3e^x,$$

где k_1, k_2, k_3 – уже известные числа.

Теперь переходим в область G_3. Переходя в уравнениях (17) $(i=2)$ и (17) $(i=3)$ к пределу при $y\to 0$ в силу (10) и (12), после некоторых преобразований, получим:

$$\omega_3(x-y)=\omega_2(x-y),\ -1\le x-y\le 0.$$

Переходя в уравнениях (16) и (17) $(i=3)$ к пределу при $x\to 0$, после некоторых преобразований в силу (9) и (11), приходим к соотношению:

$$\overline{\omega}_1(-y)=\left[\tau_3''(y)-\tau_3'(y)\right]e^{cy}+\omega_3(-y),\ 0\le y\le 1, \tag{35}$$

где введено обозначение $\omega_1(x-y)=\begin{cases}\overline{\omega}_1(x-y),\ -1\le x-y\le 0,\\ \overline{\overline{\omega}}_1(x-y),\ 0\le x-y\le 1.\end{cases}$

Далее, переходя в уравнении (16) к пределу при $y\to 0$ в силу (10) и (11), находим:

$$\overline{\overline{\omega}}_1(x)=\tau_1''(x)-\nu_1(x),\ 0\le x\le 1. \tag{36}$$

Теперь рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases}u_{3xx}-u_{3yy}=\Omega_3(x-y)e^{-cy},\\ u_3(x,0)=T_2(x),\ u_{3y}(x,0)=N_2(x),\ -1\le x\le 1,\\ u_3(0,y)=\tau_3(y),\ u_{3x}(0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1.\end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и $\Omega_3(x)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 0$ они определяются так: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, $\Omega_3(x)=\omega_2(x)$, а в промежутке $0\le x\le 1$ они пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условия $u_{3x}(0,y)=\nu_3(y)$, будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y), \tag{37}$$

где $u_{31}(x,y)$ – решение задачи:

$$\begin{cases}u_{31xx}-u_{31yy}=0,\\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\ u_{31y}(x,0)=0,\ -1\le x\le 1,\\ u_{31}(0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1;\end{cases} \tag{38}$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи:

$$\begin{cases}u_{32xx}-u_{32yy}=0,\\ u_{32}(x,0)=0,\ u_{32y}(x,0)=N_2(x),\ -1\le x\le 1,\\ u_{32}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1;\end{cases} \tag{39}$$

$u_{33}(x,y)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} u_{33xx} - u_{33yy} = \Omega_3(x-y)e^{-cy}, \\ u_{33}(x,0) = 0,\ u_{33y}(x,0) = 0,\ -1 \le x \le 1, \\ u_{33}(0,y) = 0,\ 0 \le y \le 1. \end{cases} \tag{40}$$

Методом продолжения находим решения задач (38), (39) и (40). Они имеют вид:

$$u_{31}(x,y) = \frac{1}{2}\left[T_2(x+y) + T_2(x-y)\right], \tag{41}$$

$$u_{32}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_2(t)\,dt, \tag{42}$$

$$u_{33}(x,y) = -\frac{1}{2}\int_0^y e^{-c\eta}\,d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_3(\xi-\eta)\,d\xi, \tag{43}$$

где

$$T_2(x) = \begin{cases} \tau_2(x), -1 \le x \le 0, \\ 2\tau_3(x) - \tau_2(-x),\ 0 \le x \le 1; \end{cases} \quad N_2(x) = \begin{cases} \nu_2(x), -1 \le x \le 0, \\ -\nu_2(-x),\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

$$\Omega_3(x-y) = \begin{cases} \omega_3(x-y), -1 \le x-y \le 0, \\ -3e^{-cy}\omega_3(-y) + \\ +\left[2\omega_3'(-y) - c\omega_3(-y)\right]\int_0^y e^{-c\eta}\,d\eta,\ 0 \le x-y \le 1. \end{cases}$$

Подставляя (41), (42) и (43) в (37), имеем:

$$u_3(x,y) = \frac{1}{2}\left[T_2(x+y) + T_2(x-y)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^y e^{-c\eta}\,d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_3(\xi-\eta)\,d\xi. \tag{44}$$

Дифференцируя (44) по x и полагая $x \to 0$, имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y) = \tau_3'(y) + \beta_1(y), \tag{45}$$

где $\beta_1(y)$ – известная функция.

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (16), удовлетворяющего условиям (2), (10), (13), затем дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю с учетом (35), (36) и (45), получим ещё одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$. Исключая из этого полученного соотношения и из (45) функции $\nu_3(y)$, после длинных вычислений и преобразований приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\tau_3'(y)$:

$$\tau_3'(y) + \int_0^y K_1(y,\eta)\tau_3'(\eta)\,d\eta = g_1(y), \tag{46}$$

где $K_1(y,\eta)$, $g_1(y)$ – известные функции, причем $K_1(y,\eta)$ имеет слабую особенность $(1/2)$, $g_1(y)$ – непрерывная функция, а

$$\left.\begin{matrix} G(x,y;\xi,\eta) \\ N(x,y;\xi,\eta) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \mp \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (16).

Решая уравнению (46), находим функцию $\tau_3'(y)$ и тем самым, функции $\nu_3(y)$, $\overline{\omega}_1(-y)$, $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$.

Замечание 1. В случае $0<\gamma<1$ в областях G_2, G_3 и G_4 задача решается аналогично случаю $\gamma=1$, а в области G_1 задача решается разделением области G_1 на n частей, высоты первых $n-1$ частей которых равны на $\frac{b}{a}$, а последней – не больше $\frac{b}{a}$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвёртого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

3. Mamazhanov, M., & Shermatova, H. M. (2022). On some boundary value problems for a class of third-order equations of parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three lines of type change. Namangan Davlat universiteti ilmiy axborotnomasi. Namangan, 41-51.

4. Mamajonov M., Shermatova X.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. Journal of applied and industrial mathematics. 16, 481–489 (2022). https://doi.org/10.1134/S1990478922030127

5. Mamajonov, M., & Shermatova, H. M. (2017). On a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a concave hexagonal region. Vestnik KRAUNTS. Physical and Mathematical Sciences,(1 (16), 14-21.

6. Mamajonov M., Shermatova H.M. Statement and study of a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed pentagonal domain, when the slope of the characteristic of the operator the first order is greater than one. International journal of research in commerce, IT, engineering and social sciences. ISSN: 2349-7793 Impact Factor: 6.876., Volume: 16 Issue: 05 in May 2022. pp. 117-130.

7. Mamajonov M., Aroev D.D., Shermatova G. Statement and investigation of one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a pentagonal domain with three lines of type change. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 332-342.

8. Мамажанов М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сборник международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования», Ош ГУ, г. Ош., 12-13 мая, 2023 г., с. 120-132.

9. Apakov Yu.P., Mamajonov S.M. Solvability of a boundary value problem for a fourth order equation of parabolic-hyperbolic type in a pentagonal domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021, 15 (4), pp. 586-596.

10. Mamajanov M., Rakhimov Q., Shermatova Kh. On the formulation and investigation of a boundary value problem for a third-order equation of a parabolic-hyperbolic type. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, No. 2(114), 2024, pp. 135–146.

11. Mamajonov M. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the fourth order. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 1(117), 2025, pp. 118–132.