UO‘K 372.851:004.9

GEOGEBRA MUHITIDA TENGLAMALARNI GEOMETRIK TALQIN QILISH: KO‘P REPREZENTATSIYALI YONDASHUV VA METODIK MODEL

Musurmonova Ma’mura Oman qizi,
Shahrisabz davlat pedagogika instituti katta o‘qituvchisi,
fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD),
Shahrisabz, O‘zbekiston
musurmonova.mamura@gmail.com

Annotatsiya. *Maqolada GeoGebra dinamik matematik muhitida bir o‘zgaruvchili tenglamalarni geometrik talqin qilish metodikasining nazariy asoslari va metodik modeli ishlab chiqilgan. Tenglamani algebraik, grafik va dinamik reprezentatsiyalar o‘rtasidagi o‘tishlar tizimi sifatida qarash taklif etilgan. To‘rt bosqichli model – algebraik qayta ifodalash, grafik gipoteza, tasdiqlash va dinamik umumlashtirish – asoslangan hamda $x^3 - 3x = 1$ va $2^x = x^2$ tenglamalari misolida ko‘rsatilgan. Ikkinchi misolda standart ko‘rish oynasi ildizlardan birini yashiradi; bu grafik usulning cheklovlarini va algebraik mulohazaning zarurligini ochib beradi. Tenglamalarni geometrik talqin qilishda foydalaniladigan GeoGebra buyruqlari tizimi, grafik yechishdagi tipik xatolar tasnifi va ularning oldini olish usullari keltirilgan. Natijalardan oliy ta’lim muassasalari va akademik litseylarda matematika o‘qitishda foydalanish mumkin.*

Kalit so‘zlar: *GeoGebra, tenglama, geometrik talqin, grafik usul, reprezentatsiya, dinamik matematik muhit, metodik model, tipik xatolar, ildizlar soni.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ GEOGEBRA: ПОДХОД НА ОСНОВЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И МЕТОДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Аннотация. *В статье разработаны теоретические основы и методическая модель геометрической интерпретации уравнений с одной переменной в динамической математической среде GeoGebra. Уравнение предлагается рассматривать как систему переходов между алгебраическим, графическим и динамическим представлениями. Обоснована четырёхэтапная модель – алгебраическое преобразование, графическая гипотеза, подтверждение и динамическое обобщение, – которая проиллюстрирована на уравнениях $x^3 - 3x = 1$ и $2^x = x^2$. Во втором примере стандартное окно просмотра скрывает один из корней, что раскрывает ограничения графического метода и необходимость алгебраического рассуждения. Приведены система команд GeoGebra, классификация типичных ошибок графического решения уравнений и способы их предупреждения. Результаты могут быть использованы в преподавании математики в вузах и академических лицеях.*

Ключевые слова: *GeoGebra, уравнение, геометрическая интерпретация, графический метод, представление, динамическая математическая среда, методическая модель, типичные ошибки, число корней.*

GEOMETRIC INTERPRETATION OF EQUATIONS IN GEOGEBRA: A MULTIPLE-REPRESENTATION APPROACH AND A METHODOLOGICAL MODEL

Abstract. *The article develops the theoretical foundations and a methodological model for the geometric interpretation of equations in one variable in GeoGebra. An equation is treated as a system of transitions between algebraic, graphical and dynamic representations. A four-stage model – algebraic reformulation, graphical conjecture, verification and dynamic generalization – is justified and illustrated with $x^3 - 3x = 1$ and $2^x = x^2$. In the second example the standard viewing window hides one of the roots, revealing the limitations of the graphical method and the need for algebraic reasoning. GeoGebra commands, a classification of typical errors in graphical solving and ways to prevent them are presented.*

Key words: *GeoGebra, equation, geometric interpretation, graphical method, representation, dynamic mathematics environment, methodological model, typical errors, number of roots.*

Kirish. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi Qarori [1] matematika ta’limida zamonaviy axborot texnologiyalaridan foydalanishni muhim yo‘nalish sifatida belgilab berdi. Bu yo‘nalishda dinamik matematik dasturlar, xususan GeoGebra alohida o‘rin tutadi: u algebra, geometriya va matematik analiz vositalarini yagona interfeysda birlashtiradi va bepul tarqatiladi [2, 3].

Tenglamalar mavzusi maktab va oliy ta’lim matematikasining markaziy bo‘g‘inlaridan biri. An’anaviy o‘qitishda asosiy e’tibor algebraik almashtirishlarga qaratiladi, grafik usul esa ko‘pincha yordamchi, «taxminiy» usul sifatida qoladi [4]. Natijada talabalar tenglamani belgilar ustida bajariladigan amallar zanjiri sifatida qabul qiladi, uning geometrik mazmuni – ikki funksiya grafiklarining kesishish nuqtalari – esa ongda mustahkamlanmaydi [5].

Maqolaning maqsadi – GeoGebra muhitida tenglamalarni geometrik talqin qilish metodikasining nazariy asoslarini aniqlash va turkumning keyingi ishlari uchun tayanch bo‘ladigan metodik modelni ishlab chiqish.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Matematik obyektni tushunishning kognitiv asoslarini tadqiq qilgan R. Duval matematik obyektlarga faqat semiotik reprezentatsiyalar orqali murojaat qilish mumkinligini hamda tushunish obyektning kamida ikki semiotik registrdagi ifodasini va ular orasidagi o‘tishni egallashni talab qilishini ko‘rsatgan [6]. A. Arkavi vizual reprezentatsiyalar matematikani o‘rganishda nafaqat illyustratsiya, balki mulohaza yuritish vositasi ekanini asoslagan va ayni paytda vizuallashtirish bilan bog‘liq qiyinchiliklarni ham qayd etgan [7]. M. Hohenwarter va hammualliflar GeoGebra ning geometriya va algebrani bog‘lash imkoniyatlarini hamda matematik analizni o‘qitishdagi tatbiqlarini tavsiflagan [2, 3]. A. Leung dinamik geometriya muhitida o‘quv topshiriqlarini loyihalashning epistemik modelini taklif qilgan bo‘lib, unda obyektlarni sudrash orqali variatsiyani kuzatish bilim hosil qilishning muhim mexanizmi sifatida qaraladi [8]. P. Drijvers raqamli texnologiyalarning samaradorligi dasturning o‘zidan ko‘ra topshiriqlar dizayni va o‘qituvchining roliga bog‘liq ekanini ta’kidlaydi [9]. M. Artig esa CAS muhitida o‘qitishda texnik va konseptual ishlar o‘rtasidagi dialektikani ochib bergan va instrumentatsiya masalasini ko‘targan [10]. D. Tall va S. Vinner tushuncha obrazi bilan tushuncha ta’rifi o‘rtasidagi nomuvofiqlik talabalar xatolarining manbalaridan biri ekanini ko‘rsatgan [5].

Tahlil shuni ko‘rsatadiki, reprezentatsiyalar nazariyasi va dinamik muhitning didaktik salohiyati alohida-alohida chuqur o‘rganilgan bo‘lsa-da, tenglamalarni geometrik talqin qilishni bosqichma-bosqich tashkil etuvchi va grafik usulning cheklovlarini ham hisobga oluvchi metodik model yetarlicha ishlab chiqilmagan.

Tadqiqot obyekti va metodlari. Tadqiqot obyekti – akademik litsey va oliy ta’lim muassasalarida tenglamalar mavzusini o‘qitish jarayoni, predmeti – GeoGebra muhitida tenglamalarni geometrik talqin qilish metodikasi. Tadqiqotda nazariy tahlil (matematika didaktikasi va dinamik matematik muhitlar bo‘yicha adabiyotlar), mazmun tahlili («Algebra va analiz asoslari», «Elementar matematika» fanlari dasturlari), didaktik modellashtirish va matematik tahlil usullaridan foydalanildi. Barcha misollar GeoGebra Classic 6 muhitida qurildi, sonli natijalar mustaqil ravishda tekshirildi.

Tenglamaning geometrik talqini. $f(x) = g(x)$ tenglamaning yechimlari to‘plami

$$X = \{x \in D(f) \cap D(g):\ f(x) = g(x)\} \qquad (1)$$

$y = f(x)$ va $y = g(x)$ grafiklari kesishish nuqtalarining abssissalari to‘plamiga teng. Teng kuchli ko‘rinish $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ esa yechimlarni bitta grafikning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalari sifatida talqin qiladi. Bu ikki talqin metodik jihatdan teng emas. Birinchisi tenglamaning tuzilishini saqlaydi va chap hamda o‘ng qismlarning xossalaridan (monotonlik, qavariqlik, chegaralanganlik) foydalanishga imkon beradi. Ikkinchisi esa ildizlarni bitta funksiyaning nollari sifatida lokallashtirish uchun qulay.

Reprezentatsiyalar tizimi. GeoGebra muhitida tenglama uch reprezentatsiyada birdaniga ifodalanadi: algebraik (Algebra oynasi va CAS), grafik (Grafika oynasi) va dinamik (slayderlar va sudraladigan obyektlar). Dinamik reprezentatsiya an’anaviy qog‘oz-qalam muhitida mavjud emas va aynan u GeoGebra ning didaktik salohiyatini belgilaydi [8, 9]: tenglama koeffitsiyentini o‘zgartirganda grafiklar va kesishish nuqtalari bir vaqtda o‘zgaradi.

Asosiy buyruqlar. 1-jadvalda tenglamalarni geometrik talqin qilishda foydalaniladigan GeoGebra buyruqlari keltirilgan (buyruqlar ingliz tilidagi interfeys bo‘yicha berilgan; mahalliylashtirilgan interfeysda ularning nomlari farq qilishi mumkin).

1-jadval. Tenglamalarni geometrik talqin qilishdagi asosiy GeoGebra buyruqlari

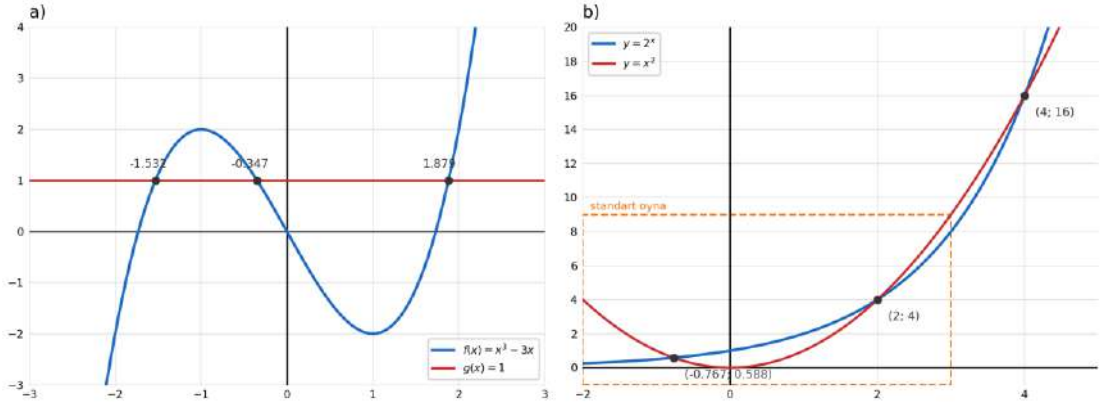
Buyruq	Vazifasi	Metodik ahamiyati
f(x)=…, g(x)=…	Funksiyalarni kiritish	Tenglama qismlarini alohida obyekt sifatida ko‘rish
Intersect(f,g)	Grafiklar kesishish nuqtalari	(1) talqinning bevosita tatbiqi
Roots(h,a,b)	$[a;b]$ dagi nollar	Ildizlarni lokallashtirish
NSolve(f(x)=g(x))	Sonli yechish (CAS)	Grafik gipotezani tekshirish
Solve(f(x)=g(x))	Aniq yechish (CAS)	Algebraik usul bilan bog‘lash
a=Slider(-5,5,0.1)	Parametr kiritish	Dinamik umumlashtirish
ZoomIn(x1,y1,x2,y2)	Ko‘rish oynasini belgilash	Yashirin ildizlarni topish

Natijalar va ularning tahlili. Nazariy tahlil asosida tenglamani geometrik talqin qilishning to‘rt bosqichli metodik modeli ishlab chiqildi. *1-bosqich – algebraik qayta ifodalash:* tenglama $f(x)=g(x)$ ko‘rinishiga keltiriladi, bunda qismlarni ajratishning bir necha varianti ko‘rib chiqiladi. *2-bosqich – grafik gipoteza:* grafiklar quriladi va ildizlar soni hamda taqribiy joylashuvi haqida gipoteza shakllantiriladi. *3-bosqich – tasdiqlash:* gipoteza sonli (NSolve) va imkon bo‘lsa algebraik yo‘l bilan tekshiriladi, ildizlar soni esa funksiyalarning xossalari asosida isbotlanadi. *4-bosqich – dinamik umumlashtirish:* tenglamaga parametr kiritilib, ildizlar sonining parametrga bog‘liqligi tadqiq qilinadi.

1-misol: $x^3-3x=1$. 1-bosqichda tenglama $f(x)=x^3-3x$ va $g(x)=1$ ko‘rinishida ajratiladi. 2-bosqichda Intersect(f,g) buyrug‘i uchta kesishish nuqtasini beradi (1a-rasm): $x_1\approx-1{,}532$, $x_2\approx-0{,}347$, $x_3\approx1{,}879$. 3-bosqichda ildizlar soni hosila orqali asoslanadi: $f'(x)=3x^2-3$ bo‘lgani uchun $f(-1)=2$ – lokal maksimum, $f(1)=-2$ – lokal minimum; $-2<1<2$ bo‘lgani uchun gorizontal to‘g‘ri chiziq grafikni aynan uch marta kesadi. Bu misolning o‘ziga xos tomoni shundaki, $x=2\cos\varphi$ almashtirish tenglamani $\cos3\varphi=\frac{1}{2}$ ko‘rinishga keltiradi va ildizlarning aniq qiymatlarini beradi:

$$x_k=2\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right),\qquad k=0,1,2. \qquad (2)$$

Shunday qilib, GeoGebra dagi taqribiy natija trigonometrik almashtirish g‘oyasiga turtki beradi va grafik gipoteza algebraik aniq yechim bilan yakunlanadi.



1-rasm. a) $x^3-3x=1$ tenglamaning grafik talqini; b) $2^x=x^2$ tenglama: standart ko‘rish oynasi (uzuq chiziq) $x=4$ ildizni ko‘rsatmaydi

2-misol: $2^x=x^2$. GeoGebra ning standart ko‘rish oynasida ($x\in[-2;3]$ atrofida) ikki kesishish nuqtasi ko‘rinadi: $x\approx-0{,}767$ va $x=2$. Ko‘pchilik talabalar tenglamaning ikkita ildizi bor degan xulosaga keladi. Ammo oynani kengaytirish ($x=4$ nuqtada $2^4=4^2=16$) uchinchi ildizni ochadi (1b-rasm). 3-bosqichda uchta ildiz borligi va boshqasi yo‘qligi isbotlanadi. $x>0$ da tenglama $x\ln2=2\ln x$, ya’ni $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln2}{2}$ ko‘rinishga keladi. $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$ funksiya $(0;e]$ da o‘sadi, $[e;+\infty)$ da kamayadi. Shuning uchun u $\left(0;\frac{1}{e}\right)$ oraliqdagi har bir qiymatni aniq ikki marta qabul qiladi ($x=2$ va $x=4$). $x<0$ da esa 2^x o‘sadi, x^2 kamayadi, demak ildiz yagona.

Tipik xatolar tasnifi. Matematik tahlil va adabiyotlar [7, 10] asosida grafik yechishdagi tipik xatolarning to‘rt guruhi ajratildi (2-jadval).

2-jadval. Grafik yechishdagi tipik xatolar va ularning oldini olish

Xato turi	Misol	Oldini olish usuli
Ko‘rish oynasi xatosi	$2^x = x^2$ da $x = 4$ ning yo‘qolishi	Asimptotik xatti-harakatni tahlil qilish, oynani kengaytirish
Urinish xatosi	$x^2 - 2x + 1{,}001 = 0$ «ildizga ega» bo‘lib ko‘rinadi	Masshtabni kattalashtirish, diskriminantni hisoblash
Aniqlik xatosi	Taqribiy qiymatni aniq deb qabul qilish	Solve buyrug‘i va algebraik tekshirish
Aniqlanish sohasi xatosi	Yo‘qolgan yoki ortiqcha ildizlar	Grafikni aniqlanish sohasi bilan birga tahlil qilish

Ikkinchi xato ayniqsa muhim: $y = x^2 - 2x + 1{,}001$ grafigi Ox o‘qidan faqat $0{,}001$ balandlikda o‘tadi va standart masshtabda uni urinishdan ajratib bo‘lmaydi. Bu grafik usul ildizlar soni haqida faqat gipoteza bera olishini, isbotni esa bermasligini ko‘rsatadi.

Muhokama. Olingan natijalar GeoGebra ning tenglamalar mavzusidagi roli haqidagi keng tarqalgan qarashga aniqlik kiritadi. Dinamik muhit ko‘pincha «javobni tez topish» vositasi sifatida taqdim etiladi. Ammo 2-misol shuni ko‘rsatadiki, ekrandagi tasvirga tanqidiy qaramasdan ishlatilgan dastur noto‘g‘ri xulosaga olib kelishi mumkin. Shuning uchun taklif etilgan modelda grafik bosqich (2-bosqich) har doim tasdiqlash bosqichi (3-bosqich) bilan birga keladi. Grafik gipotezani algebraik yoki analitik mulohaza bilan tekshirish ehtiyoji talabada o‘z-o‘zidan paydo bo‘ladi va aynan shu ehtiyoj isbotning didaktik ahamiyatini ochib beradi. Bu xulosa CAS va dinamik muhitlarda o‘qitishning texnik va konseptual jihatlari o‘zaro bog‘liqligi haqidagi M. Artigning tadqiqotlariga mos keladi [10].

Modelning ikkinchi muhim jihati – tenglamani qismlarga ajratishning tanlovi. $x^3 - 3x = 1$ ni $x^3 = 3x + 1$ ko‘rinishida ham talqin qilish mumkin: bunda kubik parabola to‘g‘ri chiziq bilan kesishadi. Turli ajratishlarni solishtirish talabaga bitta tenglama turli geometrik manzaralarga mos kelishi mumkinligini ko‘rsatadi va reprezentatsiyalar orasidagi moslashuvchan o‘tishni rivojlantiradi, bu esa R. Duval ta’kidlagan tushunishning asosiy shartidir [6].

Uchinchidan, dinamik umumlashtirish bosqichi alohida tenglamani yechishdan tenglamalar oilasini tadqiq qilishga o‘tishni ta’minlaydi. Masalan, $x^3 - 3x = a$ tenglama uchun a slayderini harakatlantirib, $|a| < 2$ da uchta, $|a| = 2$ da ikkita, $|a| > 2$ da bitta ildiz borligini kuzatish mumkin. Bu parametrli tenglamalarga tabiiy ko‘prik bo‘lib, turkumning keyingi maqolasida batafsil ko‘riladi.

Tadqiqotning cheklovi shundaki, taklif etilgan modelning o‘quv natijalariga ta’siri pedagogik tajribada hali tekshirilmagan. Bunday tajribani o‘tkazish va natijalarni statistik tahlil qilish keyingi bosqichning vazifasi hisoblanadi.

Xulosa. Tadqiqot GeoGebra muhitida tenglamalarni geometrik talqin qilishni algebraik, grafik va dinamik reprezentatsiyalar o‘rtasidagi o‘tishlar tizimi sifatida tashkil etish maqsadga muvofiqligini ko‘rsatdi. Ishlab chiqilgan to‘rt bosqichli metodik model – algebraik qayta ifodalash, grafik gipoteza, tasdiqlash va dinamik umumlashtirish – grafik usulni taqribiy hisoblash vositasidan tenglamaning tuzilishini tadqiq qilish vositasiga aylantiradi. Bu model $x^3 - 3x = 1$ misolida grafik natijadan aniq trigonometrik yechimga, $2^x = x^2$ misolida esa ildizlar sonini qat’iy isbotlashga olib keldi.

Grafik yechishdagi tipik xatolar – ko‘rish oynasi, urinish, aniqlik va aniqlanish sohasi xatolari – tasniflandi. Ulardan har birining oldini olish tasdiqlash bosqichining zarurligini asoslaydi. Taklif etilgan model turkumning keyingi maqolalarida parametrli tenglamalar, tengsizliklar va ularning sistemalarini geometrik talqin qilish metodikasi uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son Qarori.

2. Hohenwarter M., Jones K. Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra // Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. – 2007. – Vol. 27, No. 3. – P. 126–131.

3. Hohenwarter M., Hohenwarter J., Kreis Y., Lavicza Z. Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra // Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11). – Monterrey, Mexico, 2008. – 9 p.

4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. Ч. 1: Учебник. – М.: Мнемозина, 2012. – 400 с.

5. Tall D., Vinner S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity // Educational Studies in Mathematics. – 1981. – Vol. 12, No. 2. – P. 151–169.

6. Duval R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics // Educational Studies in Mathematics. – 2006. – Vol. 61, No. 1–2. – P. 103–131.

7. Arcavi A. The role of visual representations in the learning of mathematics // Educational Studies in Mathematics. – 2003. – Vol. 52, No. 3. – P. 215–241.

8. Leung A. An epistemic model of task design in dynamic geometry environment // ZDM Mathematics Education. – 2011. – Vol. 43, No. 3. – P. 325–336.

9. Drijvers P. Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't) // Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. – Cham: Springer, 2015. – P. 135–151.

10. Artigue M. Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work // International Journal of Computers for Mathematical Learning. – 2002. – Vol. 7, No. 3. – P. 245–274.