УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ В РЕЖИМЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НА НЕЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ибрагимова Дилдора Азамат кизи,
преподаватель кафедры «Математика»
Навоийского государственного университета
ibragimovadildora1305@gmail.com
Ризокулова Ситора Собиржон кизи,
ассистент кафедры «Высшая математика и информационные технологии» Навоийского государственного горно-технологического университета
sitorrizoqulova99@gmail.com

Аннотация. *Настоящее исследование посвящено строгому математическому анализу квантово-механических операторов Шрёдингера, характеризующихся наличием сингулярного притягивающего потенциала. В качестве геометрического носителя взаимодействия выступает незамкнутая одномерная дуга Γ (конечной длины L), расположенная в континууме* $\mathbb{R}^3$*. Главная цель работы заключается в определении точных асимптотических характеристик собственных значений рассматриваемого гамильтониана при условии, что константа связи неограниченно возрастает. Установлено, что поведение системы вблизи кривой редуцируется к эффективной одномерной модели с геометрически обусловленным потенциалом, причём на свободных краях дуги естественным образом индуцируются краевые условия типа Дирихле.*

Ключевые слова: *оператор Шрёдингера, сингулярные взаимодействия, сильная связь, асимптотики собственных значений, квантовые волноводы, условия Дирихле.*

UCH O‘LCHAMLI FAZODAGI YOPIQ BO‘LMAGAN EGRI CHIZIQLARDA JOYLASHGAN SINGULAR POTENSIALLI SHRYODINGER OPERATORLARI UCHUN KUCHLI BOG‘LANISHDAGI SPEKTRAL ASIMPTOTIKALAR

Annotatsiya. *Mazkur tadqiqot singulyar tortishish potensialining mavjudligi bilan xarakterlanadigan kvant mexanik Shryodinger operatorlarining qat’iy matematik tahliliga bag‘ishlangan.* $\mathbb{R}^3$ *kontinuumida joylashgan yopiq bo‘lmagan bir o‘lchamli Γ yoy (chekli L uzunlikdagi) o‘zaro ta’sirning geometrik tashuvchisi sifatida namoyon bo‘ladi. Ishning asosiy maqsadi, bog‘lanish doimiysi cheksiz o‘sishi sharti ostida, ko‘rib chiqilayotgan gamiltonian xos qiymatlarining aniq asimptotik xarakteristikalarini aniqlashdan iborat. Tizimning egri chiziq yaqinidagi dinamikasi geometrik jihatdan shartlangan potensialga ega effektiv bir o‘lchamli modelga reduksiya qilinishi, shuningdek, yoyning erkin chekkalarida Dirixle turidagi chegara shartlari tabiiy ravishda induksiyalangan.*

Kalit so‘zlar: *Shryodinger operatori, singulyar o‘zaro ta’sirlar, kuchli bog‘lanish, xos qiymatlar asimptotikasi, kvant to‘lqin o‘tkazgichlari, Dirixle shartlari.*

SPECTRAL ASYMPTOTICS IN THE STRONG COUPLING REGIME FOR SINGULAR SCHRÖDINGER OPERATORS SUPPORTED ON UNCLOSED CURVES IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Abstract. *This study presents a rigorous mathematical analysis of quantum mechanical Schrödinger operators characterized by the presence of a singular attractive potential. An open one-dimensional arc Γ (of finite length L) located in the continuum* $\mathbb{R}^3$ *serves as the geometric support for the interaction. The primary objective of this work is to determine the precise asymptotic characteristics of the eigenvalues of the Hamiltonian under the condition that the coupling constant increases boundlessly. It is established that the behavior of the system near the curve reduces to an effective one-dimensional model with a geometrically induced potential, where Dirichlet-type boundary conditions naturally emerge at the free endpoints of the arc.*

Keywords: *Schrödinger operator, singular interactions, strong coupling, eigenvalue asymptotics, quantum waveguides, Dirichlet conditions.*

Введение. Математическое описание квантовых систем с сингулярными потенциалами, сосредоточенными на подмножествах меры нуль, остаётся актуальной задачей математической физики уже на протяжении многих лет. Если изначальный фокус внимания исследователей был направлен на точечные дефекты и замкнутые многообразия (сферы, бесконечные нити или петли), то в последнее время наблюдается стремительный рост интереса к структурам, имеющим свободные края или обрывы.

С физической точки зрения подобные математические конструкции служат высокоточными моделями для описания свойств нанопроводов, квантовых волноводов с краями и микроструктур в физике конденсированного состояния. Фундаментальным аспектом здесь выступает спектральный анализ в так называемом пределе сильной связи. В этом специфическом асимптотическом режиме волновая функция частицы экспоненциально локализуется в непосредственной близости от дефекта (кривой), что неизбежно приводит к редукции размерности системы и переходу от трёхмерной динамики к эффективной одномерной. Исторически строгий анализ подобных систем с обрывами успешно проводился для двумерных моделей. В частности, для квантовых графов и незамкнутых дуг в R^2 было доказано, что наличие регулярных свободных концов естественным образом индуцирует граничные условия Дирихле на концах эффективного интервала. Однако переход к трёхмерному пространству R^3 сопровождается существенными аналитическими трудностями, связанными с существенно более сингулярным характером взаимодействия объектов коразмерности два. Настоящая работа призвана восполнить этот пробел, расширяя фундаментальные подходы на трехмерный случай и предлагая строгий спектральный анализ для незамкнутых кривых конечной длины.

Формализация модели и геометрия системы

В качестве геометрического каркаса системы рассматривается дуга $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, не имеющая точек самопересечения и принадлежащая к классу гладкости C^4. Длина данной кривой фиксирована и равна L, а естественная параметризация задаётся через интервал $I := (0, L)$. Мы накладываем условие строгой регулярности на её концы, а также требуем существования глобального трёхгранника Френе на всём её протяжении.

Для описания окрестности введём цилиндрическую трубчатую зону Ω_d, которая удобно параметризуется локальными координатами $q \equiv (s, r, \varphi)$. В этих координатах метрический тензор приобретает диагональный вид:

$g_{ij} = \mathrm{diag}(h^2, 1, r^2)$, где масштабный геометрический фактор

$h(s, r, \varphi) := 1 + r\gamma(s)\cos(\varphi - \beta(s))$ напрямую зависит от локальной кривизны $\gamma(s)$ исследуемой кривой Γ. Для того чтобы метрический тензор принял строго диагональный вид, используется специальная система координат, известная как фрейм Танга. Она вращается относительно стандартного трёхгранника Френе с угловой скоростью, в точности равной кручению исследуемой кривой. Это позволяет геометрически корректно учесть топологические особенности скручивания квантового провода в трехмерном пространстве.

Сам гамильтониан системы $H_{\alpha,\Gamma}$ конструируется посредством теории самосопряжённых расширений. В качестве исходного симметрического оператора выступает оператор Лапласа $-\Delta$, суженный на множество бесконечно дифференцируемых функций с носителем, не пересекающимся с Γ. Для любой функции $f \in W^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}^3 \backslash \Gamma)$ вводятся специфические логарифмические пределы (почти всюду на отрезке I):

$$\Xi(f)(s) := -\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\ln \rho} f|_{\tilde{\Gamma}(\rho)}(s), \qquad (1)$$

$$\Omega(f)(s) := \lim_{\rho \to 0} \left[f|_{\tilde{\Gamma}(\rho)}(s) + \Xi(f)(s) \ln \rho \right]. \qquad (2)$$

Все возможные расширения параметризуются вещественной константой α, отвечающей за силу сингулярного взаимодействия. Условие сшивки принимает вид:

$$2\pi\alpha \Xi(f) = \Omega(f). \qquad (3)$$

Множество функций, подчиняющихся правилу (3) обозначается как $bc(\alpha, \Gamma)$. Гамильтониан $H_{\alpha,\Gamma}$ воздействует на такие функции как стандартный отрицательный лапласиан: $H_{\alpha,\Gamma} f = -\Delta f$.

Важно подчеркнуть, что в силу высокой сингулярности взаимодействия коразмерности два, физически и математически некорректно описывать данный гамильтониан тривиальным формальным добавлением потенциала в виде дельта-функции Дирака к лапласиану. В рассматриваемой строгой модели предельный режим сильного притяжения соответствует устремлению константы связи к минус бесконечности, что кардинально отличает ее физическую интерпретацию от стандартных задач меньшей размерности.

Главный спектральный результат

Центральным достижением проведённого аналитического исследования является точное вычисление дискретного спектра оператора $H_{\alpha,\Gamma}$ в асимптотическом пределе сильного притяжения, когда $\alpha \to -\infty$. Прежде чем перейти к анализу дискретного спектра, важно отметить стабильность существенного спектра. В силу компактности геометрического носителя сингулярного взаимодействия Γ, существенный спектр гамильтониана совпадает со спектром свободного лапласиана: $\Gamma_{ess(H_{\alpha,\Gamma})=[0;\infty)}$

Теорема 1 (Асимптотика собственных значений). *Пусть гамильтониан $H_{\alpha,\Gamma}$ определён через обобщённые граничные условия (3) на конечной открытой C^4-гладкой кривой* Γ *с регулярными границами. Тогда справедливы следующие математические факты:*

1. *Количество уровней энергии (мощность дискретного спектра) подчиняется асимптотическому закону, который идентичен случаю замкнутых петель:*

$$\sigma_d(H_{\alpha,\Gamma}) = \frac{L}{\pi}\zeta_\alpha(1 + \mathcal{O}(e^{\alpha\pi})), \quad (4)$$

где введено обозначение $\zeta_\alpha = (-\xi_\alpha)^{1/2}$.

2. *В предельной ситуации неограниченного роста константы притяжения ($\alpha \to -\infty$), спектральные линии (а именно, -й уровеньэнергии) раскрываются в следующий ряд:*

$$\lambda_j(H_{\alpha,\Gamma}) = \xi_\alpha + \lambda_j(S) + \mathcal{O}(e^{\pi\alpha}). \quad (5)$$

Здесь $\xi_\alpha = -4e^{2(-2\pi\alpha+\psi(1))}$ представляет собой энергию связи для плоского (двумерного) точечного дефекта, а $\lambda_j(S)$ соответствует -му собственному значению одномерного эффективного оператора S, структура которого задается выражением:

$$S = -\frac{d^2}{ds^2} - \frac{1}{4}\gamma^2(s), \quad D(S) = W_0^{1,2}(0,L) \cap W^{2,2}(0,L). \quad (6)$$

Принципиально важно, что оператор S функционирует в гильбертовом пространстве $L^2(0,L)$ и жёстко подчиняется краевым условиям Дирихле на обоих концах интервала.

В приведённой формуле параметр $\psi(1)$обозначает значение дигамма-функции. Следует подчеркнуть, что для нахождения данных дискретных уровней энергии $-k^2$ применяется принцип Бирмана-Швингера, который сводит спектральную задачу к условию нетривиальности ядра соответствующего оператора: $\mathrm{Ker}(Q_{k^2} - \alpha) \neq \varnothing$

Методология и этапы доказательства

Доказательство теоремы (1) сопряжено с серьёзными аналитическими трудностями. Традиционный метод бракетирования (использование скобок Дирихле-Неймана) в данном случае даёт сбой, поскольку тривиальная нижняя оценка генерирует одномерный оператор с условиями Неймана, а не Дирихле. Для обхода этого фундаментального препятствия был разработан комплексный трёхэтапный подход. В основе предложенного метода лежит использование интегрального представления собственных функций. Этот шаг концептуально важен, так как он позволяет физически обосновать поведение квантовой частицы: в режиме сильного притяжения волновая функция не только стремительно затухает в поперечном направлении от нити, но и испытывает быстрое спадание по мере удаления от свободных концов кривой. Именно это свойство строгой пространственной локализации на краях наноструктуры даёт аналитическое право применять гладкие срезающие функции на последующих этапах и строго доказывать правомерность возникновения краевых условий Дирихле .

1. Процедура унитарного выравнивания (Straightening). Осуществляется переход от искривлённого многообразия к плоской метрике посредством изометрических трансформаций $Uf = f \circ \phi_d$ и последующей компенсации якобиана $\widehat{U}f = g^{1/4}f$. Эта манипуляция преобразует квадратичную форму в эквивалентное дифференциальное выражение:

$$(-\Delta_{\alpha,\Gamma}f_j, f_j)_{\Omega_d} = \left((-\partial_s h^{-2}\partial_s + T_\alpha + V)f_j^g, f_j^g\right)_{\mathcal{D}_d^{ex}}. \quad (7)$$

Роль индуцированного геометрией потенциала здесь выполняет слагаемое

$$V = -\frac{\gamma^2}{4h} + \frac{h_{,ss}}{2h^3} - \frac{5(h_{,s})^2}{4h^4}.$$

2. Аппроксимация через финитные функции Дирихле. Базируясь на факте экспоненциального затухания истинных собственных функций вдали от нити ($f_j(x) \sim e^{-\kappa_j(\alpha)|x-\Gamma|}$), строится приближение. Волновые функции заменяются срезанными аналогами $f_j^D = \eta f_j^g$, которые принудительно обращаются в нуль на границе трубки радиуса $d(\alpha) = e^{\pi\alpha}$. Данная аппроксимация обеспечивает квази-ортогональность:

$$(f_j^D, f_k^D) = \| f_j^D \|^2 \delta_{jk} + \mathcal{O}(d^{-2}e^{-C/d}), \quad (8)$$

доказывая, что внешние "хвосты" распределений убывают быстрее любой полиномиальной функции.

3. Построение минимаксных оценок. Формируется вспомогательный самосопряжённый оператор $W = -\partial_s h^{-2}\partial_s + T_\alpha + V$, действующий в ограниченной области. Привлекая вариационный принцип Рэлея-Ритца (супремум-инфимум), устанавливается строгая граница: $\lambda_j(W) \le \lambda_j(H_{\alpha,\Gamma}) + \mathcal{O}(d^{-18}e^{-C/d})$. Детальное изучение спектра радиального оператора $T_\alpha(s)$ позволяет изолировать сингулярное слагаемое ξ_α и доказать сходимость к эффективному гамильтониану S.

Резюме и физическая интерпретация

Подводя итог проделанному анализу, можно констатировать, что квантовомеханическое поведение частицы, захваченной сингулярным потенциалом на незамкнутой кривой в трёхмерном пространстве, в пределе сильного взаимодействия описывается одномерным оператором Шрёдингера.

Кардинальным отличием данной модели от ранее изученных систем (таких как замкнутые кольца или бесконечные прямые) является спонтанное возникновение граничных условий типа Дирихле на концах дуги. С физической точки зрения этот математический феномен интерпретируется как эффект «квантового запирания»: при бесконечном увеличении глубины потенциальной ямы частица испытывает колоссальное эффективное отталкивание от свободных краев наноструктуры, что препятствует её выходу за пределы провода. Естественным и перспективным направлением развития данной модели является введение переменной константы связи $\acute{\alpha} = \alpha + \omega(s)$ где $\omega(s)$— гладкая финитная функция. Если сила взаимодействия меняется вдоль кривой, эффективный одномерный гамильтониан приобретает дополнительный потенциал. Это, в свою очередь, открывает новые возможности для искусственного управления локализацией квантовых частиц в нанопроцессорах и сенсорах.

Кроме того, математический аппарат и подходы, использованные в данном исследовании, в будущем могут послужить надежной базой для анализа более сложных задач, в частности, спектральных свойств операторов Шрёдингера для трёхчастичных систем в режиме сильного взаимодействия. Полученные методы асимптотических оценок будут иметь фундаментальное значение для теоретического конструирования разветвлённых (графоподобных) квантовых проводов сложной топологии.

ЛИТЕРАТУРА:

1.Exner, P., Kondej, S. Strong-coupling asymptotics for Schrödinger operators with an interaction supported by an open arc in three dimensions. Comm. PDE 39 (2014), 193-212.

2.Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R., Holden, H. Solvable Models in Quantum Mechanics, 2nd edition with an appendix by P. Exner. AMS, Providence, R.I., 2005.

3.Exner, P. Leaky quantum graphs: a review. In: Analysis on graphs and its applications, Proc. Symp. Pure Math., vol. 77; AMS, Providence, R.I., 2008, pp. 523-564.

4.Faddeev, L. D., Merkuriev, S. P. Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems. Springer Science & Business Media, 1993.

5.Reed, M., Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1978.

6.M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds.): Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. 10th printing (volume 55 of Applied Mathematics Series, US National Bureau of Standards, 1972).

7.M. S. Agranovich: Strongly elliptic second-order systems with boundary vonditions on a nonclosed Lipschitz surface. Funct. Anal. Appl. 45:1 (2011),1-12.

8.J. F. Brasche, P. Exner, Yu. A. Kuperin, P. Šeba: Schrödinger operators with singular ineractions. J. Math. Anal. Appl. 184 (1994), 112-139.

9.Березин, Ф. А., Шубин, М. А. Уравнение Шредингера. Изд-во МГУ, Москва,1983.

10.Yafaev, D. R. Mathematical Scattering Theory: General Theory. American Mathematical Society, 1992.