UO‘K 372.851:004.9

IKKI O‘ZGARUVCHILI TENGSIZLIKLAR VA ULARNING SISTEMALARINI GEOGEBRA MUHITIDA GEOMETRIK TALQIN QILISH: TEKISLIKDAGI SOHALAR, ULARNING BOG‘LAMLILIGI VA CHIZIQLI OPTIMALLASHTIRISH

Musurmonova Ma’mura Oman qizi,
Shahrisabz davlat pedagogika instituti katta o‘qituvchisi,
fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD),
Shahrisabz, O‘zbekiston
musurmonova.mamura@gmail.com

Annotatsiya. *Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar va ularning sistemalari yechimi sonlar emas, balki tekislikdagi sohalardir. Shuning uchun ular geometrik talqinga eng tabiiy ravishda moslashgan mavzu hisoblanadi. Maqolada GeoGebra muhitida bunday tengsizliklarni o‘rganish metodikasi ishlab chiqilgan va unda uchta mazmuniy chiziq birlashtirilgan: yechimlar sohasini qurish, sohaning topologik xossasi – bir yoki ikki bog‘lamliligini aniqlash va chiziqli optimallashtirish masalalarini sath chiziqlari yordamida yechish. Misollar sifatida parabola va to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan soha (yuzi 4,5), halqa* $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ *va teshikli kvadrat* $|x| + |y| \le 2$, $x^2 + y^2 \ge 1$ *tahlil qilingan. Chiziqli optimallashtirish masalasida maqsad funksiyasining sath chizig‘i slayder bilan harakatlantirilib, maksimum* $(3; 1)$ *uchda erishilishi ko‘rsatilgan.*

Kalit so‘zlar: *ikki o‘zgaruvchili tengsizlik, tengsizliklar sistemasi, GeoGebra, tekislikdagi soha, bir bog‘lamli soha, ikki bog‘lamli soha, chiziqli optimallashtirish, sath chiziqlari, dinamik matematik muhit.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМ В СРЕДЕ GEOGEBRA: ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ, ИХ СВЯЗНОСТЬ И ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Аннотация. *Решениями неравенств с двумя переменными и их систем являются не числа, а области на плоскости, поэтому данная тема наиболее естественно поддаётся геометрической интерпретации. В статье разработана методика изучения таких неравенств в среде GeoGebra, объединяющая три содержательные линии: построение области решений, определение её топологического свойства – односвязности или двухсвязности – и решение задач линейной оптимизации с помощью линий уровня. В качестве примеров рассмотрены область между параболой и прямой (площадь 4,5), кольцо* $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ *и квадрат с отверстием* $|x| + |y| \le 2$, $x^2 + y^2 \ge 1$. *В задаче линейной оптимизации линия уровня целевой функции перемещается ползунком; показано, что максимум достигается в вершине* $(3; 1)$.

Ключевые слова: *неравенство с двумя переменными, система неравенств, GeoGebra, область на плоскости, односвязная область, двухсвязная область, линейная оптимизация, линии уровня, динамическая математическая среда.*

GEOMETRIC INTERPRETATION OF INEQUALITIES IN TWO VARIABLES AND THEIR SYSTEMS IN GEOGEBRA: PLANAR REGIONS, THEIR CONNECTIVITY AND LINEAR OPTIMIZATION

Abstract. *The solutions of inequalities in two variables and their systems are regions in the plane, making the topic natural for geometric interpretation. The article develops a GeoGebra-based methodology that combines three content lines: constructing the solution region, determining its connectivity – simple or double – and solving linear optimization problems with level lines. Examples include the region bounded by a parabola and a line (area 4.5), the annulus* $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ *and a square with a hole* $|x| + |y| \le 2$, $x^2 + y^2 \ge 1$. *In linear optimization, the level line of the objective function is moved with a slider, showing that the maximum is reached at the vertex* $(3; 1)$.

Key words: *inequality in two variables, system of inequalities, GeoGebra, planar region, simply connected region, doubly connected region, linear optimization, level lines, dynamic mathematics environment.*

Kirish. Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar mavzusi maktab va oliy ta’lim matematikasida bir necha muhim yo‘nalishning tutashgan joyida turadi. U analitik geometriya (chiziqlar tenglamalari), algebra (tengsizliklar sistemalari), matematik analiz (karrali integrallarda integrallash sohalari) va amaliy matematika (chiziqli dasturlash) uchun asos bo‘ladi [1, 2]. Shunga qaramay, o‘quv amaliyotida bu mavzuga kam vaqt ajratiladi: sohani qo‘lda chizish ko‘p vaqt oladi va murakkab chegarali sohalar ko‘pincha chetlab o‘tiladi.

GeoGebra muhitida tengsizlikni kiritishning o‘zi kifoya: dastur yechimlar sohasini darhol bo‘yab ko‘rsatadi, sistemalarni esa mantiqiy «va» amali orqali birlashtiradi [3, 4]. Chizish texnikasidan ozod bo‘lgan vaqtni sohalarning xossalarini tahlil qilishga sarflash mumkin. Ana shunday xossalardan biri – sohaning bog‘lamliligi – o‘quv adabiyotida deyarli qaralmaydi. Holbuki, u kompleks analiz, matematik fizika va mexanikada muhim rol o‘ynaydi: masalan, halqasimon membrananing tebranishlari doiraviy membranadagidan sifat jihatdan farq qiladi.

Maqolaning maqsadi – GeoGebra muhitida ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar va ularning sistemalarini geometrik talqin qilish metodikasini ishlab chiqish, unga sohaning bog‘lamliligi tushunchasini va chiziqli optimallashtirishni tabiiy ravishda kiritish.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklarni o‘qitish bo‘yicha an’anaviy metodik adabiyotlarda [1, 2] asosiy e’tibor yechimlar sohasini qo‘lda tasvirlash texnikasiga qaratiladi, sohaning geometrik xossalari esa deyarli tahlil qilinmaydi. R. Duval matematik obyektni tushunish uning turli semiotik registrlardagi ifodalari orasida erkin o‘tishni talab qilishini asoslagan [5]; tengsizliklar uchun bu analitik yozuv va tekislikdagi soha o‘rtasidagi o‘tishni anglatadi. A. Arkavi vizual reprezentatsiyalarni mulohaza yuritish vositasi sifatida qarab, vizuallashtirishning didaktik imkoniyatlari bilan birga uning qiyinchiliklarini ham ko‘rsatib bergan [6]. A. Leung dinamik muhitda obyektlarni sudrash orqali o‘zgarmas xossalarni aniqlashni bilim hosil qilish mexanizmi sifatida talqin qiladi [7]. P. Drijvers raqamli texnologiyalar samaradorligini belgilovchi omillar sifatida topshiriqlar dizayni, o‘qituvchining roli va ta’lim kontekstini ajratadi [8]. Chiziqli dasturlashning geometrik asoslari va optimal yechimning ko‘pburchak uchida erishilishi G. Dansig tomonidan tizimli bayon etilgan [9], sohalarning bog‘lamliligi esa kompleks analiz kurslarida qat’iy ta’riflanadi [10].

Biroq bu yo‘nalishlar o‘quv amaliyotida bir-biridan ajralgan holda qoladi: tengsizliklar sistemasi, sohaning topologik xossasi va chiziqli optimallashtirishni yagona dinamik muhitda birlashtiruvchi metodika yetarlicha ishlab chiqilmagan.

Tadqiqot obyekti va metodlari. Tadqiqot obyekti – akademik litsey va oliy ta’lim muassasalarida ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar mavzusini o‘qitish jarayoni, predmeti – GeoGebra muhitida bu tengsizliklar va ularning sistemalarini geometrik talqin qilish metodikasi. Tadqiqotda tengsizliklar bo‘yicha metodik adabiyotlar [1, 2], dinamik muhitlarda vizualizatsiya nazariyasi [5, 6] va chiziqli dasturlash asoslari [9] tahlil qilindi, didaktik modellashtirish va matematik tahlil usullari qo‘llanildi. Qurishlar GeoGebra Classic 6 da bajarildi, yuzalar va optimal qiymatlar analitik tekshirildi.

Tengsizlikning geometrik talqini. $F(x,y) \geq 0$ tengsizlikning yechimlari to‘plami $F(x,y) = 0$ chiziq bilan chegaralangan soha bo‘ladi. Sistemaning yechimi esa har bir tengsizlik sohalarining kesishmasidir:

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} \{(x,y):\ F_i(x,y) \geq 0\}. \qquad (1)$$

GeoGebra da sistema bitta ifoda sifatida kiritiladi: masalan, y>=x^2 && y<=2-x. Qat’iy va noqat’iy tengsizliklar chegara chizig‘ining uzluksiz yoki uzuq chiziq bilan tasvirlanishida farqlanadi, bu esa chegaraning sohaga tegishliligini ko‘rgazmali qiladi.

Bog‘lamlilik. Tekislikdagi soha *bir bog‘lamli* deyiladi, agar undagi har qanday yopiq chiziqni soha ichida uzluksiz deformatsiyalab nuqtaga keltirish mumkin bo‘lsa. Chegaralangan soha uchun bu shart chegara bitta yopiq chiziqdan iborat bo‘lishiga teng kuchli. Chegarasi ikki yopiq chiziqdan iborat soha (ichida «teshik» bo‘lgan soha) *ikki bog‘lamli* deyiladi [10]. Maktab darajasida bu tushunchani intuitiv mezon bilan kiritish mumkin: «Sohada unga tegishli bo‘lmagan nuqtani o‘rab oluvchi yopiq yo‘l bormi?». GeoGebra da bu mezonni sohaga tegishli nuqta ustiga qurilgan va sudraladigan aylana orqali tekshirish

mumkin: sudrash jarayonida aylana sohadan chiqmay turib teshikni o‘rab olsa, soha ikki bog‘lamli bo‘ladi [7].

Chiziqli optimallashtirish. $z = c_1x + c_2y$ maqsad funksiyasining Ω ko‘pburchak sohadagi eng katta qiymati ko‘pburchak uchlaridan birida erishiladi [9]. Geometrik talqinda $c_1x + c_2y = z$ sath chiziqlari parallel to‘g‘ri chiziqlar oilasini tashkil etadi. z slayder bilan oshirilganda sath chizig‘i sohani oxirgi marta «tark etadigan» nuqta optimal yechim bo‘ladi.

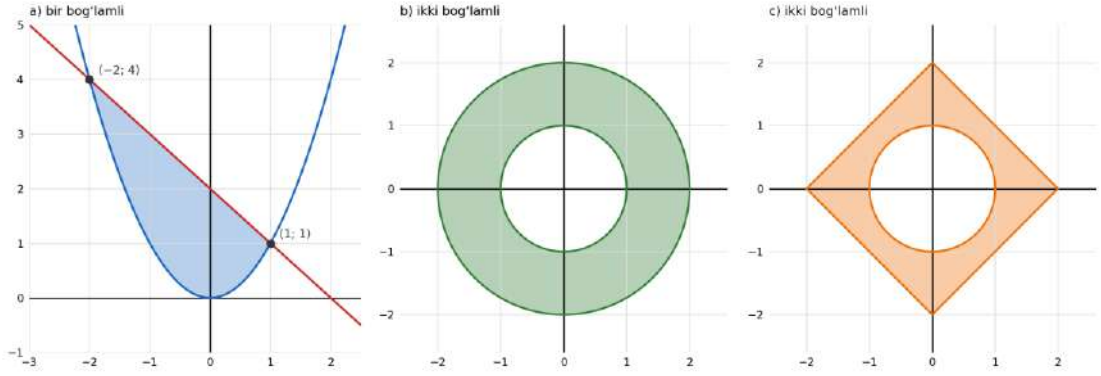
Natijalar va ularning tahlili. *1-misol (bir bog‘lamli soha).* $y \geq x^2$, $y \leq 2 - x$ sistemasi parabola va to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan sohani beradi (1a-rasm). Chegaralar $x^2 = 2 - x$ tenglamadan topiladigan $(-2; 4)$ va $(1; 1)$ nuqtalarda kesishadi. Sohaning yuzi GeoGebra da IntegralBetween(2-x, x^2, -2, 1) buyrug‘i bilan hisoblanadi va analitik natijaga mos keladi:

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx = \frac{9}{2} = 4{,}5. \qquad (2)$$

Bu yerda tengsizliklar sistemasi va aniq integral o‘rtasida bevosita bog‘lanish o‘rnatiladi. Sistemaning soha sifatidagi tasviri integrallash chegaralarini tanlashni o‘z-o‘zidan tushunarli qiladi.

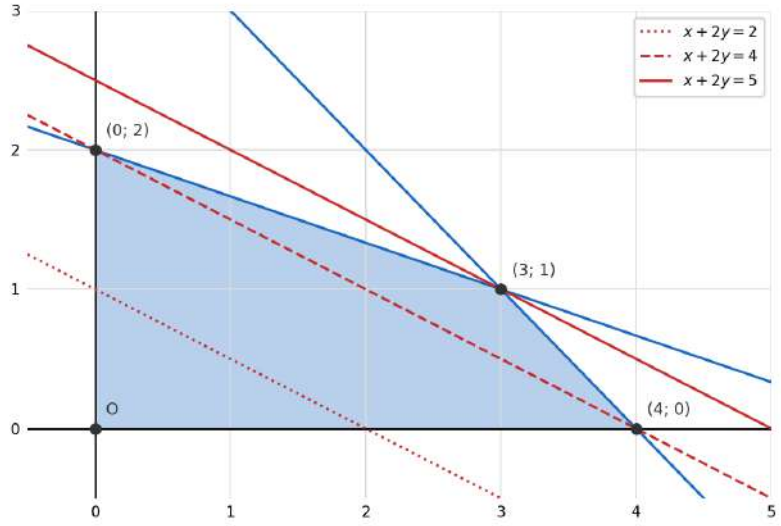
2-misol (halqa). $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ qo‘sh tengsizlik GeoGebra da 1<=x^2+y^2<=4 ko‘rinishida kiritiladi va markazi koordinata boshida bo‘lgan halqani beradi (1b-rasm). Halqa ichidagi aylana koordinata boshini – sohaga tegishli bo‘lmagan nuqtani – o‘rab oladi, shuning uchun soha ikki bog‘lamli. Uning chegarasi ikki aylanadan iborat, yuzi esa $4\pi - \pi = 3\pi \approx 9{,}42$.

3-misol (teshikli kvadrat). $|x| + |y| \leq 2$, $x^2 + y^2 \geq 1$ sistemasi diagonallari koordinata o‘qlarida yotgan kvadratdan doirani olib tashlashdan hosil bo‘ladi (1c-rasm). Soha ikki bog‘lamli: tashqi chegara siniq chiziq, ichki chegara aylana. Yuzi $8 - \pi \approx 4{,}86$. Bu misol shuni ko‘rsatadiki, bog‘lamlilik chegaraning shakliga emas, balki uning qismlari soniga bog‘liq.



1-rasm. Tengsizliklar sistemalarining sohalari: a) $y \geq x^2$, $y \leq 2 - x$ (bir bog‘lamli); b) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ (ikki bog‘lamli); c) $|x| + |y| \leq 2$, $x^2 + y^2 \geq 1$ (ikki bog‘lamli)

4-misol (chiziqli optimallashtirish). $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 4$, $x + 3y \leq 6$ shartlarda $z = x + 2y$ ning eng katta qiymatini toping. Soha to‘rtburchak bo‘lib, uning uchlari $O(0; 0)$, $(4; 0)$, $(3; 1)$, $(0; 2)$. z slayderi va x+2y=z sath chizig‘i kiritilib, z oshiriladi (2-rasm). $z = 4$ da chiziq $(0; 2)$ uchdan o‘tadi, lekin soha hali uning yuqorisida qoladi. $z = 5$ da chiziq sohaga faqat $(3; 1)$ uchda tegadi. Uchlardagi qiymatlarni solishtirish (0; 4; 5; 4) natijani tasdiqlaydi: $z_{\max} = 5$ va u $(3; 1)$ nuqtada erishiladi.



2-rasm. Chiziqli optimallashtirish masalasi: soha va $x + 2y = z$ sath chiziqlari

Metodik ketma-ketlik. Tadqiqot natijasida mavzuni o‘rganishning to‘rt bosqichli ketma-ketligi ishlab chiqildi (1-jadval).

1-jadval. Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklarni o‘rganish ketma-ketligi

Bosqich	Mazmun	GeoGebra vositalari	Rivojlantiriladigan tushuncha
1	Bitta tengsizlik sohasi	Tengsizlikni kiritish	Chegara va sohaning tegishliligi
2	Sistemalar va ularning yuzi	&&, IntegralBetween Kesi	shma, integrallash sohasi
3	Bog‘lamlilik	Sudraladigan aylana	Bir va ikki bog‘lamli soha
4	Chiziqli optimallashtirish	Slayder, sath chizig‘i	Ekstremumning uchda erishilishi

Muhokama. Ishlab chiqilgan metodikaning birinchi xususiyati shundaki, GeoGebra ning sohani darhol qurish imkoniyati mavzuning og‘irlik markazini chizishdan tahlilga ko‘chiradi. An’anaviy darsda murakkab sohani qurish vaqtning katta qismini egallaydi va sohaning xossalari haqida savol berishga vaqt qolmaydi. Dinamik muhitda esa sohani qurish bir necha soniya oladi, talabaning diqqati esa chegaralarning kesishishi, sohaning yuzi va shakli kabi mazmunli savollarga qaratiladi. Bu vizualizatsiyani mulohaza vositasi sifatida ishlatish haqidagi xulosalarga mos keladi [5, 6]. Shu bilan birga, bunday natija dasturning o‘zidan emas, balki topshiriqlarning puxta loyihalanganidan kelib chiqadi [8].

Ikkinchi xususiyat – bog‘lamlilik tushunchasining kiritilishi. Bu tushuncha odatda faqat oliy matematikaning maxsus kurslarida uchraydi. Ammo tengsizliklar sistemalari uni tabiiy va sodda misollarda ko‘rsatishga imkon beradi: halqa va teshikli kvadrat talabaga «teshikli» sohaning geometrik obrazini beradi. Bu obraz keyinchalik kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasida (Koshi teoremasi bir bog‘lamli sohalar uchun) va matematik fizika masalalarida (ichki kontur qo‘shimcha chegaraviy shart talab qiladi) zarur bo‘ladi. Shu ma’noda mazkur metodika maktab matematikasi va oliy matematika o‘rtasida propedevtik ko‘prik vazifasini bajaradi.

Uchinchi xususiyat – chiziqli optimallashtirishning dinamik talqini. Slayder yordamida harakatlanuvchi sath chizig‘i optimal yechimning ko‘pburchak uchida erishilishini isbotdan oldin intuitiv tarzda ko‘rsatadi. Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarini ham slayder bilan o‘zgartirib, sath chizig‘i sohaning tomoniga parallel bo‘lgan holatda optimal yechim yagona bo‘lmasligini ham kuzatish mumkin.

Tadqiqotning cheklovi – u nazariy-metodik xarakterga ega. Taklif etilgan ketma-ketlikning samaradorligi pedagogik tajribada baholanishi kerak.

Xulosa. Tadqiqot ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar va ularning sistemalari GeoGebra muhitida geometrik talqin uchun eng qulay mavzulardan biri ekanligini ko‘rsatdi, chunki ularning yechimi tekislikdagi sohadir. Ishlab chiqilgan metodika uch mazmuniy chiziqni birlashtiradi: sohani qurish va uning yuzini aniq integral orqali hisoblash, sohaning bir yoki ikki bog‘lamliligini aniqlash hamda chiziqli optimallashtirish masalalarini sath chiziqlari yordamida yechish.

Tahlil qilingan misollarda parabola va to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan soha bir bog‘lamli, halqa va teshikli kvadrat esa ikki bog‘lamli ekanligi ko‘rsatildi. Bog‘lamlilik chegaraning shakliga emas, balki uning qismlari soniga bog‘liqligi ta’kidlandi. Chiziqli optimallashtirish masalasida harakatlanuvchi sath chizig‘i

optimal yechimning ko‘pburchak uchida erishilishini ko‘rgazmali asosladi. Taklif etilgan to‘rt bosqichli ketma-ketlik maktab va oliy matematika o‘rtasidagi uzviylikni kuchaytirishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. Ч. 1: Учебник. – М.: Мнемозина, 2012. – 400 с.

2. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач. 10 класс. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.

3. Hohenwarter M., Jones K. Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra // Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics. – 2007. – Vol. 27, No. 3. – P. 126–131.

4. Hohenwarter M., Hohenwarter J., Kreis Y., Lavicza Z. Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra // Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11). – Monterrey, Mexico, 2008. – 9 p.

5. Duval R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics // Educational Studies in Mathematics. – 2006. – Vol. 61, No. 1–2. – P. 103–131.

6. Arcavi A. The role of visual representations in the learning of mathematics // Educational Studies in Mathematics. – 2003. – Vol. 52, No. 3. – P. 215–241.

7. Leung A. An epistemic model of task design in dynamic geometry environment // ZDM Mathematics Education. – 2011. – Vol. 43, No. 3. – P. 325–336.

8. Drijvers P. Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn’t) // Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. – Cham: Springer, 2015. – P. 135–151.

9. Dantzig G.B. Linear Programming and Extensions. – Princeton: Princeton University Press, 1963. – 625 p.

10. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. – 3-е изд. – М.: Наука, 1985. – 336 с.