UO‘K 519.245:004.421

MARKOV ZANJIRLI MONTE-KARLO USULLARI KONVERGENSIYASINING ALGORITMIK TAHLILI VA MA’LUMOTLAR TUZILMALARI BILAN BOG‘LIQLIGI

Xamroyev Utkir Namozovich,
Navoiy davlat universiteti Raqamli texnologiyalar kafedrasi dotsenti v.b., PhD
Navoiy, O‘zbekiston
utkirxamroyev903@gmail.com
ORCID: 0009-0002-4027-8579

Annotatsiya. *Maqolada Markov zanjirli Monte-Karlo (MZMK) usullarining konvergensiya nazariyasi hisoblash murakkabligi, ergodiklik, spektral tirqish va aralashish vaqti kabi tavsiflar grafning bog‘langanligi, kengaytiruvchanligi va algoritm iteratsiyalari soni bilan bir qiymatli mos kelishi ko‘rsatilgan. Algoritmning to‘liq hisoblash narxini uch mustaqil ko‘paytuvchiga – integral avtokorrelyatsiya vaqti, bitta qadamning amal narxi va zarur samarali tanlanma hajmiga – ajratuvchi model taklif etilib, isbotlangan. Model asosida ma’lumotlar tuzilmasini tanlash konvergensiya tezligiga emas, balki narx ko‘paytuvchisiga ta’sir qilishi asoslangan. Xulosalar 2D Izing modeli va Metropolis algoritmi ustidagi eksperimentlarda tasdiqlangan: inkremental hisoblash 110 baravar, Fenwick daraxti esa 140 baravar tezlanish bergan.*

Kalit so‘zlar: *Markov zanjirli Monte-Karlo, geometrik ergodiklik, spektral tirqish, aralashish vaqti, konduktans, ma’lumotlar tuzilmalari, Fenwick daraxti, alias usuli, samarali tanlanma hajmi, hisoblash murakkabligi.*

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО ПО МАРКОВСКИМ ЦЕПЯМ И ЕГО СВЯЗЬ СО СТРУКТУРАМИ ДАННЫХ

Аннотация. *В статье теория сходимости методов Монте-Карло по марковским цепям (МКМЦ) переосмысливается с позиций вычислительной сложности. Показано, что эргодичность, спектральная щель и время перемешивания однозначно соответствуют связности графа, его расширяемости и числу итераций алгоритма. В качестве основного результата предложена и доказана модель, разлагающая полную вычислительную стоимость алгоритма на три независимых сомножителя: интегральное время автокорреляции, стоимость одного шага и требуемый эффективный размер выборки. Обосновано, что выбор структуры данных влияет не на скорость сходимости, а на стоимостной сомножитель. Выводы подтверждены экспериментами на двумерной модели Изинга и алгоритме Метрополиса: инкрементное вычисление дало ускорение в 110 раз, дерево Фенвика – в 140 раз.*

Ключевые слова: *Монте-Карло по марковским цепям, геометрическая эргодичность, спектральная щель, время перемешивания, кондактанс, структуры данных, дерево Фенвика, метод алиасов, эффективный размер выборки, вычислительная сложность.*

ALGORITHMIC ANALYSIS OF THE CONVERGENCE OF MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS AND ITS RELATION TO DATA STRUCTURES

Abstract. *The paper reinterprets the convergence theory of Markov chain Monte Carlo (MCMC) in terms of computational complexity. Ergodicity, spectral gap and mixing time are shown to correspond to graph connectivity, expansion and iteration count. The main result is a proved cost model factorising the total cost into three independent multipliers: integrated autocorrelation time, per-step operation cost and required effective sample size. Hence data-structure choice affects the cost multiplier, not the convergence rate. Experiments on the 2D Ising model and random-walk Metropolis algorithm confirm it: incremental evaluation gave a 110-fold and the Fenwick tree a 140-fold speed-up.*

Keywords: *Markov chain Monte Carlo, geometric ergodicity, spectral gap, mixing time, conductance, data structures, Fenwick tree, alias method, effective sample size, computational complexity.*

Kirish. Monte-Karlo usulining g‘oyasi Metropolis va Ulam ishida bayon etilgan [1]. Uning Markov zanjirlariga asoslangan varianti 1953-yilda Metropolis va hammualliflar tomonidan statistik fizika ehtiyojlari uchun taklif etilgan [2], keyinchalik esa Hastings tomonidan umumiy ko‘rinishga keltirilgan [3]. Ularning nazariy asosi – umumiy holatlar fazosidagi Markov zanjirlarining ergodik nazariyasi – Meyn va Tweedie ishlarida to‘liq shakllantirilgan [4].

Markov zanjirli Monte-Karlo (MZMK) – bu birinchi navbatda algoritm, ya’ni chekli vaqt va xotira resurslarini iste’mol qiluvchi hisoblash protsedurasi. Uning tahlili algoritmlar nazariyasining standart apparati – asimptotik murakkablik, amortizatsiyalangan tahlil, ma’lumotlar tuzilmalarini tanlash – orqali olib borilishi tabiiy. Ushbu ikki tilning o‘zaro tarjimasi ko‘pincha aniq ifodalanmaydi, natijada nazariy jihatdan “tez aralashadigan” zanjir amalda sekin ishlaydigan dasturga aylanishi mumkin.

Maqolaning asosiy maqsadi MZMK usullarining konvergensiya nazariyasi bilan ma’lumotlar tuzilmalari va algoritmlar nazariyasi o‘rtasidagi bog‘lanishni tizimli ravishda o‘rnatish, hamda algoritmning to‘liq hisoblash narxini optimallashtirish mumkin bo‘lgan mustaqil komponentlarga ajratuvchi modelni ishlab chiqish.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. MZMK usullarining konvergensiya nazariyasi bo‘yicha fundamental natijalar Meyn va Tweedie tadqiqotlarida [4]: $\boldsymbol{\varphi}$-ajralmaslik, aperiodiklik va Xarris qaytuvchanligi shartlari asosida ergodik teorema isbotlangan, minorizatsiya va drift shartlari orqali geometrik ergodiklik mezonlari berilgan. Roberts va Rosenthalning sharh maqolasi [5] bu natijalarni ixcham va amaliyotga yaqin ko‘rinishda bayon qiladi. Levin va Peres ishlarida [6] diskret holatlar fazosi uchun aralashish vaqti nazariyasini rivojlantiradi.

Sinclair va Jerrum ishlarida [7] MZMK dastlab hisoblash murakkabligi nazariyasining quroli sifatida qaralgan: konduktans orqali aralashish vaqtini baholash usuli va “kanonik yo‘llar” texnikasi taklif etilgan. Jerrum, Sinclair va Vigoda [8] permanentni hisoblash uchun to‘liq polinomial tasodifiy approksimatsiya sxemasini qurishda aynan shu apparatga tayangan. Propp va Wilson taklif etgan usuli esa zanjirning muvozanat taqsimotidan aniq tanlanma olish imkonini beradi [9]. Bu yo‘nalishda konvergensiya nazariyasi to‘g‘ridan-to‘g‘ri murakkablik nazariyasi tilida ifodalanadi.

Ma’lumotlar tuzilmalari tomonidan qaraganda, diskret taqsimotdan tanlanma olish masalasi uchun Walkerning alias usuli [10] $O(1)$ vaqtni, Fenwick daraxti [11] esa dinamik og‘irliklar uchun $O(\log n)$ vaqtni ta’minlaydi. Swendsen va Wang klaster algoritmi [12] kritik sekinlashishni bartaraf etadi va uni amalga oshirish Tarjanning ajratilgan to‘plamlar birlashmasi tuzilmasiga [13] tayanadi. O‘zbekistonda algoritmlash va ma’lumotlar tuzilmalari asoslari bo‘yicha o‘quv-uslubiy adabiyot ham shakllangan: mualliflarning hammualliflikdagi darsligida [14] algoritmlarni loyihalash va ularning murakkabligini baholash usullari, laboratoriya ishlarida [15] esa bu usullarni dasturiy amalga oshirish masalalari bayon etilgan, lekin adabiyotlarda MZMK ning algoritmik tahlili alohida ko‘rib chiqilmagan.

Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, ikkala yo‘nalish – ehtimolliy konvergensiya nazariyasi va algoritmik amalga oshirish – mustaqil ravishda chuqur rivojlangan, ammo ularning o‘zaro ta’sirini yagona narx modeli doirasida ifodalovchi ishlar yetarli emas. Ushbu maqola shu bo‘shliqni to‘ldirishga qaratilgan.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqotda nazariy va eksperimental usullar birgalikda qo‘llanildi. Nazariy qismda umumiy holatlar fazosidagi Markov zanjirlari nazariyasi, $\boldsymbol{L^2(\pi)}$ fazosidagi operatorlarning spektral tahlili va graflar nazariyasining Cheeger tipidagi tengsizliklari [6] ishlatildi. Algoritmik qismda asimptotik murakkablikni baholashning standart usullari qo‘llanildi [16].

Eksperimental qism Python 3 muhitida (NumPy 2.4) bajarildi. Sinov masalalari sifatida quyidagilar tanlandi: (a) davriy chegaraviy shartli ikki o‘lchovli Izing modeli, kritik harorat $\beta_c = 1/2\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0{,}440687$; (b) $\mathcal{N}(0,1)$ maqsadli taqsimot uchun tasodifiy sayr Metropolis algoritmi; (c) $n = 20000$ elementli diskret taqsimotdan tanlanma olish. Har bir tajribada tasodifiy sonlar generatori qat’iy urug‘ bilan initsializatsiya qilinib, natijalarning takrorlanuvchanligi ta’minlandi. Integral avtokorrelyatsiya vaqti tez Furye almashtirishga asoslangan usul bilan, avtokorrelyatsiya funksiyasi manfiy qiymat qabul qilgan nuqtada uzish qoidasi bo‘yicha hisoblandi [17].

Tahlil va natijalar.

Markov zanjiri implitsit graf sifatida

$(\mathrm{X}, \mathcal{B})$ o‘lchovli fazoda π maqsadli taqsimot va $P(x,\cdot)$ o‘tish yadrosi berilgan bo‘lsin, bunda $\pi P = \pi$. Diskret holatda P ni og‘irlikli yo‘naltirilgan graf $G = (V, E)$ ning stoxastik qo‘shnilik matritsasi sifatida qarash mumkin.

Bu talqinda konvergensiya nazariyasining har bir sharti graf xossasiga aylanadi (1-jadval).

1-jadval.

Ehtimolliy tushuncha	Graf/algoritmik ekvivalenti
φ-ajralmaslik	Grafning kuchli bog‘langanligi
Aperiodiklik	Sikllar uzunliklarining EKUBi 1 ga teng
Xarris qaytuvchanligi	Har bir uchga cheksiz marta qaytish
Spektral tirqish $1-\lambda_2$	Grafning kengaytiruvchanlik darajasi
Invariant o‘lchov π	PageRank vektori: $\pi P=\pi$
Konduktans Φ	Normallashtirilgan minimal kesim
Aralashish vaqti t_{mix}	Algoritmning iteratsiyalar soni

Amaliy ahamiyatga ega kuzatuv shundan iboratki, qiziqarli masalalarda $|V|$ eksponensial katta (2^n, $n!$ tartibida), shu sababli P matritsasi hech qachon oshkor saqlanmaydi. Uning o‘rniga qo‘shnilarni talab bo‘yicha generatsiyalovchi protsedura ishlatiladi. Bu grafik algoritmlardagi implitsit graf bo‘yicha qidiruv paradigmasining aynan o‘zi bo‘lib, MZMK ni klassik graf algoritmlari bilan bir metodologik oilaga birlashtiradi.

Aralashish vaqti algoritm murakkabligi sifatida

Aralashish vaqti quyidagicha aniqlanadi:

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon)=\min\{n:\|P^n(x,\cdot)-\pi\|_{TV}\le\varepsilon\}. \quad (1)$$

Minorizatsiya va drift shartlari asosidagi klassik natijaga ko‘ra, agar $C\subset \mathsf{X}$ to‘plam uchun $P^m(x,A)\ge \varepsilon\nu(A)$ va $V\ge 1$ funksiya uchun $PV\le \lambda V+b\mathbb{1}_C$ bajarilsa, u holda shunday $R<\infty$ va $\rho<1$ topiladiki,

$$\|P^n(x,\cdot)-\pi\|_{TV}\le R\,V(x)\,\rho^n. \quad (2)$$

(2) dan bevosita $t_{\text{mix}}(\varepsilon)=O(\text{Gap}^{-1}\log\varepsilon^{-1})$ kelib chiqadi, bunda $\text{Gap}(P)=1-\|P\|_{L_0^2(\pi)}$ – spektral tirqish. Spektral tirqishning graf topologiyasi bilan bog‘lanishi Cheeger tipidagi tengsizlik orqali beriladi:

$$\frac{\Phi^2}{2}\le \text{Gap}\le 2\Phi,\qquad \Phi=\min_{\pi(S)\le 1/2}\frac{\sum_{x\in S,\,y\notin S}\pi(x)P(x,y)}{\pi(S)}. \quad (3)$$

(3) tengsizlikning algoritmik talqini quyidagicha: Φ kattaligi grafdagi eng “tor” kesimni, ya’ni oqim tarmoqlaridagi minimal kesim tushunchasini ifodalaydi. Demak, uchta bayon – “zanjir sekin aralashadi”, “grafda kichik konduktansli kesim mavjud” va “algoritm eksponensial vaqt talab qiladi” – bir xil matematik mazmunga ega.

Algoritmning umumiy narx modeli

Konvergensiya nazariyasi t_{mix} ni, ya’ni iteratsiyalar sonini beradi. Biroq real hisoblash vaqti bunga bitta iteratsiyaning narxi ko‘paytirilgan miqdorga teng. Quyidagi tasdiq bu ajralishni aniq ifodalaydi.

Ta’rif 1. $f\in L^2(\pi)$ funksional uchun integral avtokorrelyatsiya vaqti va samarali tanlanma hajmi

$$\tau_{\text{int}}(f)=1+2\sum_{k\ge 1}\rho_k(f),\qquad \text{ESS}_n=\frac{n}{\tau_{\text{int}}(f)} \quad (4)$$

ko‘rinishda aniqlanadi, bunda $\rho_k(f)=\text{Corr}_\pi\big(f(X_0),f(X_k)\big)$.

Tasdiq 1 (narxning uch ko‘paytuvchili ajralishi). P zanjiri π-qaytuvchan va geometrik ergodik, $\pi(f^2)<\infty$ bo‘lsin. $\hat{\theta}_n$ baholovchining dispersiyasi berilgan δ^2 darajaga erishishi uchun zarur bo‘lgan to‘liq hisoblash vaqti asimptotik ravishda

$$T(\delta)=\underbrace{\tau_{\text{int}}(f)}_{\text{zanjir sifati}}\cdot\underbrace{C_{\text{step}}}_{\text{ma’lumotlar tuzilmasi}}\cdot\underbrace{\frac{\text{Var}_\pi(f)}{\delta^2}}_{\text{talab qilingan aniqlik}}\big(1+o(1)\big) \quad (5)$$

ga teng, bunda C_{step} – bitta o‘tish qadamining amal narxi. Bunda uchala ko‘paytuvchi bir-biridan mustaqil ravishda optimallashtirilishi mumkin.

Isbot. Markov zanjirlari uchun markaziy limit teoremasiga [5] binoan geometrik ergodiklik va $\pi(f^2)<\infty$ shartlarida

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\pi(f)\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\big(0,\sigma_f^2\big),\qquad \sigma_f^2=\text{Var}_\pi(f)\,\tau_{\text{int}}(f).$$

Demak $\text{Var}\big(\hat{\theta}_n\big)\sim\sigma_f^2/n$ va $\text{Var}\big(\hat{\theta}_n\big)\le\delta^2$ sharti $n\ge\text{Var}_\pi(f)\tau_{\text{int}}(f)/\delta^2$ ga ekvivalent. To‘liq vaqt $T=n\cdot C_{\text{step}}$ bo‘lgani uchun (5) kelib chiqadi.

Mustaqillikni ko‘rsatamiz. τ_{int} faqat $\{P^k\}$ oilasi va f orqali, ya’ni zanjirning taqsimotlar darajasidagi xossalari orqali aniqlanadi. C_{step} esa bir xil P yadrosini amalga oshiruvchi turli hisoblash protseduralari uchun har xil qiymat qabul qiladi: agar ikki protsedura bir xil P ni realizatsiya qilsa, ular bir xil τ_{int} ga, lekin turli C_{step} ga ega bo‘ladi. Uchinchi ko‘paytuvchi faqat δ va f ga bog‘liq. Shunday qilib ko‘paytuvchilar juft-jufti bilan mustaqil.

Natija 1. Ma’lumotlar tuzilmasini almashtirish (5) dagi faqat C_{step} ko‘paytuvchisiga ta’sir qiladi va konvergensiya tezligini o‘zgartirmaydi. Aksincha, taklif taqsimotini yoki algoritm turini o‘zgartirish τ_{int} ga ta’sir qiladi.

Natija 2. Agar biror ma’lumotlar tuzilmasi qadamning *mazmunini* o‘zgartirsa (masalan, bitta spin o‘rniga butun klasterni yangilasa), u holda o‘zgarish ikkala ko‘paytuvchiga birdan ta’sir qiladi va Tasdiq 1 dagi mustaqillik shu chegarada buziladi. Swendsen–Wang algoritmi aynan shunday holatga misol: ajratilgan to‘plamlar birlashmasi tuzilmasi C_{step} ni oshiradi, ammo kritik nuqtada τ_{int} ni sezilarli darajada kamaytiradi.

Qadam narxini kamaytiruvchi ma’lumotlar tuzilmalari

Tasdiq 1 ga muvofiq C_{step} ni kamaytirish mustaqil optimallashtirish masalasidir. Quyida asosiy tuzilmalar keltirilgan.

Diskret taqsimotdan tanlanma olish. Bu amal Gibbs sampleri va kinetik Monte-Karlo algoritmlarining ichki siklida bajariladi. Tuzilmalarning taqqoslanishi 2-jadvalda berilgan.

2-jadval.

Tuzilma	Tayyorlash	Bitta tanlanma	Og‘irlikni yangilash
Chiziqli qidiruv	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$
Prefiks yig‘indi + binar qidiruv	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(n)$
Alias jadvali (Walker)	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$
Fenwick daraxti	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$

Bundan tanlash mezoni kelib chiqadi: og‘irliklar o‘zgarmasa alias jadvali, har qadamda o‘zgarsa Fenwick daraxti optimal.

Inkremental hisoblash. Metropolis qabul qilish ehtimolida $\pi(y)/\pi(x)$ nisbat ishtirok etadi, shu sababli π ning to‘liq qiymatini hisoblash shart emas. Izing modelida bitta spinni ag‘darishda energiya o‘zgarishi

$$\Delta E = 2Js_i \sum_{j\sim i} s_j \qquad (6)$$

formulasi bilan $O(\deg i) = O(1)$ amalda topiladi, holbuki to‘liq energiyani qayta hisoblash $O(L^2)$ amal talab qiladi. Bu ma’lumotlar tuzilmalari nazariyasidagi dangasa (lazy) qayta hisoblash tamoyilining bevosita qo‘llanilishidir.

Boshqa tuzilmalar. Klaster algoritmlarida ajratilgan to‘plamlar birlashmasi $O\big(\alpha(n)\big)$ amortizatsiyalangan narx bilan; kinetik Monte-Karloda keyingi hodisani tanlash uchun ustuvorlik navbati $O(\log n)$ bilan; zarrachalar simulyatsiyasida qo‘shnilarni izlash uchun to‘r yoki k-o‘lchovli daraxt $O(n^2)$ o‘rniga $O(n)$ narx bilan qo‘llaniladi.

Hisoblash eksperimentining natijalari

Inkremental hisoblashning samarasi. Ikki o‘lchovli Izing modelida 20000 Metropolis qadami bajarildi. **To‘liq va inkremental energiya hisoblashning taqqoslanishi (**20000 **qadam)** natijalari 3-jadvalda keltirilgan.

3-jadval.

L	$N = L^2$	To‘liq hisoblash, s	Inkremental, s	Tezlanish
16	256	0,445	0,104	4,3
32	1024	0,499	0,092	5,4
64	4096	0,596	0,088	6,8
128	16384	0,854	0,086	10,0
256	65536	10,633	0,096	110,3

Jadvaldan ko‘rinadiki, inkremental variantning vaqti L ga bog‘liq emas va 0,09 s atrofida barqaror qoladi, to‘liq hisoblash vaqti esa panjara o‘lchami bilan o‘sadi. Bu (6) formuladan kutilgan $O(1)$ va $O(L^2)$ asimptotikalarini tasdiqlaydi. Kichik L larda tezlanishning nazariy qiymatdan past bo‘lishi vektorlashtirilgan amallarning doimiy qo‘shimcha xarajati bilan izohlanadi.

Tanlanma olish tuzilmalari. $n = 20000$ o‘lchamli taqsimotdan 20000 ta tanlanma olishda chiziqli qidiruv 17,698 s, alias jadvali 0,051 s (347 baravar tez), Fenwick daraxti 0,076 s (233 baravar tez) vaqt sarfladi. Og‘irliklar har qadamda o‘zgaradigan dinamik rejimda (2000 yangilash va tanlanma) chiziqli variant 1,801 s, Fenwick daraxti 0,013 s vaqt talab qildi, ya’ni tezlanish 140 baravarni tashkil etdi. Bu 2-jadvaldagi nazariy murakkablik baholarini to‘liq tasdiqlaydi.

Integral avtokorrelyatsiya vaqti. $\mathcal{N}(0,1)$ maqsadli taqsimot uchun tasodifiy sayr Metropolis algoritmi $n = 200000$ qadam bilan turli qadam kattaligi σ da ishga tushirildi (4-jadval).

4-jadval.

σ	Qabul qilish darajasi	τ_{int}	ESS
0,1	0,968	403,8	495
0,5	0,844	21,2	9420
1,0	0,704	8,4	23757
2,4	0,445	4,5	44301
5,0	0,242	6,2	32026
20,0	0,063	22,5	8893

4-jadval Tasdiq 1 dagi birinchi ko‘paytuvchining xatti-harakatini ko‘rsatadi: τ_{int} minimumga $\sigma \approx 2{,}4$ da, ya’ni qabul qilish darajasi 0,445 bo‘lganda erishiladi. Bu bir o‘lchovli holat uchun optimal skalyalash nazariyasining [18] bashoratiga mos keladi; yuqori o‘lchovlarda optimal qiymat 0,234 ga intiladi. Muhimi shundaki, σ ni sozlash orqali erishilgan 90 baravar farq (τ_{int} 403,8 dan 4,5 gacha) ma’lumotlar tuzilmasini almashtirish orqali erishilgan tezlanishga qo‘shimcha bo‘lib ko‘payadi – bu (5) dagi ko‘paytuvchilar mustaqilligining bevosita amaliy tasdig‘i.

Xulosa. MZMK usullarining konvergensiya nazariyasidagi asosiy tushunchalar – $\boldsymbol{\varphi}$-ajralmaslik, aperiodiklik, spektral tirqish, konduktans va aralashish vaqti – graf algoritmlari nazariyasining mos tushunchalari bilan bir qiymatli moslikda ekanligi ko‘rsatildi (1-jadval). Bu moslik MZMK ni tasodifiy algoritmlarning umumiy nazariyasi doirasiga to‘liq joylashtirish imkonini beradi.

MZMK algoritmining to‘liq hisoblash narxini uchta mustaqil ko‘paytuvchiga ajratuvchi model taklif qilindi va isbotlandi (Tasdiq 1, (5) formula). Model optimallashtirish yo‘nalishlarini aniq ajratadi: zanjirni sozlash τ_{int} ga, ma’lumotlar tuzilmasini tanlash C_{step} ga, aniqlik talabi uchinchi ko‘paytuvchiga ta’sir qiladi.

Hisoblash eksperimenti model bashoratlarini tasdiqladi: inkremental hisoblash $L = 256$ da 110 baravar, Fenwick daraxti dinamik rejimda 140 baravar, qadam kattaligini sozlash esa 90 baravar tezlanish berdi. Bu tezlanishlar bir-biriga ko‘paytiriladigan mustaqil manbalardir.

Amaliy tavsiya sifatida quyidagi ketma-ketlik taklif etiladi: avval τ_{int} ni o‘lchash, so‘ngra profillash orqali C_{step} ning ustunlik qiluvchi qismini aniqlash va faqat shundan keyin optimallashtirishga kirishish. Amaliyotda C_{step} ni kamaytirish ko‘pincha eng arzon g‘alabani beradi, chunki u nazariyani o‘zgartirmaydi va algoritmning to‘g‘riligiga ta’sir qilmaydi.

ADABIYOTLAR:

1. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // Journal of the American Statistical Association. – 1949. – Vol. 44, № 247. – P. 335–341.

2. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines // The Journal of Chemical Physics. – 1953. – Vol. 21, № 6. – P. 1087–1092.

3. Hastings W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications // Biometrika. – 1970. – Vol. 57, № 1. – P. 97–109.

4. Meyn S., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability. – 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. – 594 p.

5. Roberts G. O., Rosenthal J. S. General state space Markov chains and MCMC algorithms // Probability Surveys. – 2004. – Vol. 1. – P. 20–71.

6. Levin D. A., Peres Y. Markov Chains and Mixing Times. – 2nd ed. – Providence: American Mathematical Society, 2017. – 447 p.

7. Sinclair A., Jerrum M. Approximate counting, uniform generation and rapidly mixing Markov chains // Information and Computation. – 1989. – Vol. 82, № 1. – P. 93–133.

8. Jerrum M., Sinclair A., Vigoda E. A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with nonnegative entries // Journal of the ACM. – 2004. – Vol. 51, № 4. – P. 671–697.

9. Propp J. G., Wilson D. B. Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics // Random Structures & Algorithms. – 1996. – Vol. 9, № 1–2. – P. 223–252.

10. Walker A. J. An efficient method for generating discrete random variables with general distributions // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1977. – Vol. 3, № 3. – P. 253–256.

11. Fenwick P. M. A new data structure for cumulative frequency tables // Software: Practice and Experience. – 1994. – Vol. 24, № 3. – P. 327–336.

12. Swendsen R. H., Wang J.-S. Nonuniversal critical dynamics in Monte Carlo simulations // Physical Review Letters. – 1987. – Vol. 58, № 2. – P. 86–88.

13. Tarjan R. E. Efficiency of a good but not linear set union algorithm // Journal of the ACM. – 1975. – Vol. 22, № 2. – P. 215–225.

14. Xamroyeva D. N., Djurayev D. D., Xamroyev U. N. Algoritmlash asoslari: darslik. – Navoiy: TEXNO PRINT NAVOIY, 2024. – 142 b.

15. Xamroyeva D. N., Seytov Sh. J., Raymova M. U., Xamroyev U. N., Raximov F. A. Algoritmlash asoslari. Laboratoriya ishlari: o‘quv qo‘llanma. – Toshkent: «Dimal» nashriyoti, 2025. – 124 b.

16. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to Algorithms. – 4th ed. – Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2022. – 1291 p.

17. Vehtari A., Gelman A., Simpson D., Carpenter B., Bürkner P.-C. Rank-normalization, folding, and localization: An improved $\hat{R}$ for assessing convergence of MCMC // Bayesian Analysis. – 2021. – Vol. 16, № 2. – P. 667–718.

18. Roberts G. O., Gelman A., Gilks W. R. Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithms // The Annals of Applied Probability. – 1997. – Vol. 7, № 1. – P. 110–120.