UO‘K 539.3:534.231.1

QOVUSHQOQ–ELASTIK MUHITDAGI TO‘LDIRUVCHILI SFERIK QOBIQDA GARMONIK VA NOSTATSIONAR TO‘LQINLAR DIFRAKSIYASI

Axmedov Nasriddin Baxodirovich,
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalari universiteti “Sun’iy intellekt va matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi
nasriddinaxmedov@gmail.com
ORCID 0009-0003-1780-7476

Annotatsiya. *Maqolada cheksiz qovushqoq-elastik muhitga joylashtirilgan, izotrop elastik to‘ldiruvchiga ega sferik qobiq bilan bo‘ylama to‘lqinning o‘zaro ta’siri nazariy jihatdan o‘rganiladi. Qobiq uch o‘lchovli elastiklik nazariyasi, tashqi muhit esa hajmiy va siljish relaksatsiyasini hisobga oluvchi standart chiziqli qattiq jism modeli asosida tavsiflanadi. Ko‘chish potensiallarini sferik funksiyalar bo‘yicha yoyish yordamida chegaraviy masala har bir sferik garmonika uchun algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Garmonik yechimdan nostatsionar javobga o‘tish Furye almashtirishi orqali ifodalanadi. Analitik natijalar sifatida relaksatsion yo‘qotish modulining chastotaga bog‘liqligi, sferik-simmetrik modada to‘ldiruvchining dinamik qattiqligi va modelning chegaraviy holatlari aniqlanadi. To‘ldiruvchi ta’sirini faqat qo‘shimcha massa bilan ifodalash yetarli emasligi ko‘rsatiladi. Ish nazariy-analitik xususiyatga ega; tajriba o‘lchovlari va muayyan konstruksiya uchun sonli difraksiya hisoblari keltirilmaydi.*

Kalit so‘zlar: *sferik qobiq, elastik to‘ldiruvchi, qovushqoq-elastik muhit, difraksiya, nostatsionar to‘lqin, relaksatsiya, sferik garmonikalar, dinamik qattiqlik.*

ДИФРАКЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С НАПОЛНИТЕЛЕМ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Аннотация. *В статье теоретически исследуется взаимодействие продольной волны со сферической оболочкой, имеющей изотропный упругий наполнитель и помещённой в бесконечную вязкоупругую среду. Оболочка описывается на основе трёхмерной теории упругости, а внешняя среда – моделью стандартного линейного твёрдого тела с учётом объёмной и сдвиговой релаксации. С помощью разложения потенциалов перемещений по сферическим функциям граничная задача сводится к системе алгебраических уравнений для каждой сферической гармоники. Переход от гармонического решения к нестационарному отклику осуществляется посредством преобразования Фурье. В качестве аналитических результатов определены частотная зависимость модуля релаксационных потерь, динамическая жёсткость наполнителя в сферически-симметричной моде и предельные случаи модели. Показано, что влияние наполнителя не может быть адекватно описано только введением дополнительной массы. Работа носит теоретико-аналитический характер; экспериментальные измерения и численные расчёты дифракции для конкретной конструкции не приводятся.*

Ключевые слова: *сферическая оболочка, упругий наполнитель, вязкоупругая среда, дифракция, нестационарная волна, релаксация, сферические гармоники, динамическая жёсткость.*

DIFFRACTION OF HARMONIC AND NON-STATIONARY WAVES IN A SPHERICAL SHELL WITH A FILLER IN A VISCOELASTIC MEDIUM

Abstract. *This paper presents a theoretical investigation of the interaction between a longitudinal wave and a spherical shell with an isotropic elastic filler embedded in an infinite viscoelastic medium. The shell is described within the framework of three-dimensional elasticity theory, whereas the surrounding medium is represented by the standard linear solid model, accounting for both volumetric and shear relaxation. By expanding the displacement potentials in terms of spherical functions, the boundary-value problem is reduced to a system of algebraic equations for each spherical harmonic. The transition from the harmonic solution to the transient response is performed using the Fourier transform. The analytical results include the frequency dependence of the relaxation loss modulus, the dynamic stiffness of the filler in the spherically symmetric mode, and the limiting cases of the model. It is shown that the effect of the filler*

cannot be adequately represented solely by an additional mass. The study is theoretical and analytical in nature; neither experimental measurements nor numerical diffraction calculations for a specific structure are presented.

Keywords: *spherical shell, elastic filler, viscoelastic medium, diffraction, transient wave, relaxation, spherical harmonics, dynamic stiffness.*

Kirish. Ichki to‘ldiruvchiga ega sferik qobiqlarning to‘lqin maydonidagi harakati qobiqning o‘z xossalari bilan birga uni o‘rab turgan muhit va ichki jismning mexanik qarshiligiga ham bog‘liq. Tushuvchi to‘lqin tashqi chegarada qaytadi va qobiq ichiga o‘tadi; ichki chegaradagi akslanishlar esa qobiqdagi maydon bilan o‘zaro ta’sirlashadi. Natijada sirt ko‘chishi va kuchlanishlarini alohida qobiq modeli asosida baholash tizimning to‘liq dinamik javobini bermasligi mumkin.

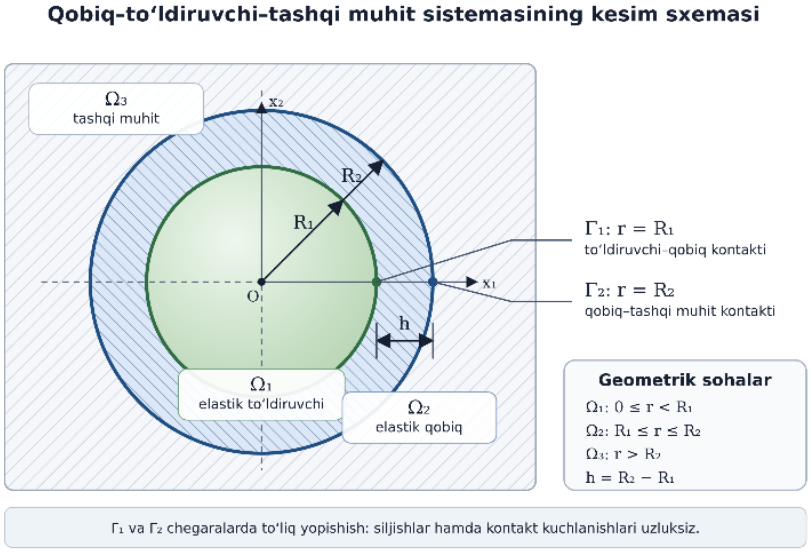
Sferik qo‘shilmada elastik to‘lqinlar sochilishining klassik yechimi Korneev va Johnson tomonidan ishlab chiqilgan [1]. Klaseboer va Sun elastik qobiqli sferik tizimda bo‘ylama va ko‘ndalang komponentlarning chastotaga sezgirligini hamda impulsli javobni spektral yechimdan tiklash imkoniyatini ko‘rsatgan [2]. Qovushqoq-elastik muhitdagi sferik qobiqlarning nostatsionar harakati Safarov va Teshaev ishida irsiy integral munosabat va Laplas almashtirishi yordamida o‘rganilgan [3]. Ushbu natijalar muhit xotirasi, qobiq va to‘ldiruvchi ta’sirini birgalikda ifodalash uchun metodik asos yaratadi.

Mazkur ishning maqsadi — elastik to‘ldiruvchili qobiq uchun garmonik va nostatsionar difraksiyani yagona chegaraviy model orqali tavsiflash, to‘ldiruvchining radial dinamik qarshiligini chiqarish va relaksatsiya parametrlarining fizik mazmunini aniqlashtirish. Tadqiqot mavjud potensiallar usuliga tayanib, e’tiborni ichki chegaraning dinamik qarshiligi va tashqi muhit relaksatsiyasini izchil bog‘lashga qaratadi. Bu yerda “nostatsionar” atamasi vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi, jumladan impulsli ta’sirni bildiradi; u dinamik noturg‘unlik bilan aynan bir tushuncha emas.

Tadqiqot metodlari.

Geometriya va fizik farazlar

Ichki radiusi a, tashqi radiusi b bo‘lgan qobiq $a < r < b$ sohani egallaydi. To‘ldiruvchi $0 \le r < a$, tashqi muhit $r > b$ da joylashadi. Ular mos ravishda f, s, e indekslari bilan belgilanadi; $h = b - a$ – qobiq qalinligi. Barcha qismlar bir jinsli va izotrop, deformatsiyalar kichik deb olinadi. Qobiq va to‘ldiruvchi elastik qattiq jismlardir. Ikki chegarada ham to‘liq yopishish, ya’ni siljishsiz va ajralishsiz kontakt qabul qilinadi. Suyuqlik yoki g‘ovak to‘ldiruvchi uchun alohida model talab etiladi.



1-rasm. Qobiq to‘ldiruvchi tashqi muhit sistemasining kesim sxemasi

Muhitning irsiy modeli va harakat tenglamalari

Nostatsionar masalada har bir nuqta to‘lqin kelishidan oldin tinch va deformatsiyasiz deb olinadi. Tashqi muhitdagi kuchlanish tenzori hajmiy deformatsiya $\vartheta = \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$ va deviator $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \vartheta\mathbf{I}/3$ orqali yoziladi:

$$\boldsymbol{\sigma}_e(t) = \mathbf{I}\int_{-\infty}^{t} K_e\,(t-\xi)\dot{\vartheta}(\xi)\,d\xi + 2\int_{-\infty}^{t} G_e\,(t-\xi)\dot{\mathbf{e}}(\xi)\,d\xi. \qquad (1)$$

Bu yerda $K_e(t)$ va $G_e(t)$ — hajmiy va siljish relaksatsiya modullari; $\mathbf{I}$ — birlik tenzor. Nuqta vaqt bo‘yicha hosilani bildiradi. Har bir modul uchun bir relaksatsiya vaqtli model tanlanadi [4]:

$$M_e(t) = M_\infty + \Delta M e^{-t/\tau_M}, \quad \Delta M = M_0 - M_\infty \geq 0, \quad M \in \{K, G\}. \qquad (2)$$

$M_0 \geq M_\infty > 0$ va $\tau_M > 0$ shartlari qabul qilinadi. M_0 boshlang‘ich, M_∞ uzoq vaqtli modulni anglatadi; K va G uchun relaksatsiya vaqtlari turlicha bo‘lishi mumkin. $e^{-i\omega t}$ vaqt konvensiyasida (1) ning chastotaviy ko‘rinishi quyidagicha:

$$M_e^*(\omega) = M_\infty + \Delta M \frac{-i\omega\tau_M}{1 - i\omega\tau_M}, \qquad \lambda_e^* = K_e^* - \frac{2}{3}G_e^*. \qquad (3)$$

Shunday qilib, muhitning xotirasi kompleks modullar orqali hisobga olinadi. Qobiq va to‘ldiruvchida $K_j^* = K_j$, $G_j^* = G_j$ haqiqiy musbat o‘zgarmaslardir. $j \in \{e, s, f\}$ uchun amplituda tenglamalari:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_j + \rho_j \omega^2 \mathbf{u}_j = 0, \qquad \boldsymbol{\sigma}_j = \lambda_j^* (\nabla \cdot \mathbf{u}_j)\mathbf{I} + 2G_j^* \boldsymbol{\varepsilon}_j. \qquad (4)$$

Bu yerda ρ_j — zichlik, $\boldsymbol{\varepsilon}_j = (\nabla \mathbf{u}_j + \nabla \mathbf{u}_j^T)/2$, $\lambda_j^* = K_j^* - 2G_j^*/3$. Chastotaviy maydon belgilarida ustki qalpoqcha qisqalik uchun yozilmaydi. Impulsli masalada har bir mahkamlangan nuqtada $t \to -\infty$ da $\mathbf{u}_j, \dot{\mathbf{u}}_j \to 0$ sharti olinadi; tashqi sohada tushuvchi maydon oldindan beriladi.

Potensiallar va sferik yoyilmalar

Tushuvchi tekis bo‘ylama to‘lqin z o‘qi bo‘ylab tarqalsin. O‘qqa simmetrik maydon uchun $\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\Psi)$ ajratishidan foydalanamiz. Bu yerda $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$; Φ va Ψ mos ravishda bo‘ylama va sferoidal ko‘ndalang komponentlarni beradi. Potensiallar Gelmgolts tenglamalarini qanoatlantiradi:

$$(\nabla^2 + k_{Pj}^2)\Phi_j = 0, \quad (\nabla^2 + k_{Sj}^2)\Psi_j = 0, \quad k_{Pj}^2 = \frac{\rho_j \omega^2}{K_j^* + 4G_j^*/3}, \quad k_{Sj}^2 = \frac{\rho_j \omega^2}{G_j^*}. \qquad (5)$$

$\omega > 0$ uchun tashqi muhitda $\mathrm{Im}k_{Pe}, \mathrm{Im}k_{Se} \geq 0$ tarmoqlari tanlanadi. Bu tanlov tashqariga tarqaluvchi to‘lqinlarning masofa bo‘yicha so‘nishiga mos keladi. Tushuvchi potensialning Legendre qatori [5]:

$$\Phi^{\mathrm{inc}} = \Phi_0 e^{ik_{Pe} r\cos\theta} = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k_{Pe} r) P_n(\cos\theta). \qquad (6)$$

Bu yerda P_n — Legendre polinomi, j_n — birinchi tur sferik Bessel funksiyasi, Φ_0 — potensial amplitudasi. Burchak θ tushuvchi to‘lqin yo‘nalishidan o‘lchanadi. Tushuvchi P-to‘lqin uchun torsion komponent uyg‘onmaydi, ammo sferoidal S-komponent umumiy holda hisobga olinishi kerak.

Chegaraviy shartlar va modal sistema

Har bir n uchun potensiallarning radial koeffitsiyentlarini $\phi_{jn}(r)$ va $\psi_{jn}(r)$ deb belgilaymiz. Tashqi muhitda sochilgan qism uchun $h_n^{(1)}$, qobiqda j_n va y_n, markazda chekli qoluvchi to‘ldiruvchi yechimida esa faqat j_n olinadi:

$$\begin{aligned} \phi_{en} &= \phi_n^{\mathrm{inc}} + A_n h_n^{(1)}(k_{Pe} r), & \psi_{en} &= B_n h_n^{(1)}(k_{Se} r), \\ \phi_{sn} &= C_n j_n(k_{Ps} r) + E_n y_n(k_{Ps} r), & \psi_{sn} &= D_n j_n(k_{Ss} r) + F_n y_n(k_{Ss} r), \\ \phi_{fn} &= G_n j_n(k_{Pf} r), & \psi_{fn} &= H_n j_n(k_{Sf} r). \end{aligned} \qquad (7)$$

y_n — ikkinchi tur sferik Bessel, $h_n^{(1)} = j_n + iy_n$ — birinchi tur sferik Hankel funksiyasi. G_n modal koeffitsiyent bo‘lib, G_j siljish moduli bilan aralashtirilmaydi. Har bir radial juftlikdan $u_r = U_n P_n$, $u_\theta = V_n \partial_\theta P_n$, $\sigma_{rr} = R_n P_n$ va $\sigma_{r\theta} = T_n \partial_\theta P_n$ aniqlanadi:

$$\begin{aligned} U_n &= \phi_n' + \frac{n(n+1)}{r}\psi_n, & V_n &= \frac{\phi_n}{r} + \psi_n' + \frac{\psi_n}{r}, \\ D_n^{\mathrm{div}} &= U_n' + \frac{2U_n}{r} - \frac{n(n+1)V_n}{r}, & R_n &= \lambda^* D_n^{\mathrm{div}} + 2G^* U_n', \\ T_n &= G^*\left(V_n' + \frac{U_n - V_n}{r}\right). \end{aligned} \qquad (8)$$

Shtrix r bo‘yicha hosilani bildiradi; D_n^{div} — divergensiya koeffitsiyenti. $r = a$ va $r = b$ da U_n, V_n, R_n, T_n uzluksiz. Kuchlanish komponentlari ikkala tomonda bir xil $\mathbf{e}_r$ yo‘nalishiga nisbatan olinadi. $\mathrm{B}_{jn}^q(r)$ ni (8) yordamida tuzilgan 4×2 matritsa deb belgilaymiz: birinchi ustun $(\phi, \psi) = \left(q_n(k_{Pj} r), 0\right)$, ikkinchisi $\left(0, q_n(k_{Sj} r)\right)$ ga mos. Noma’lumlar $\mathbf{x}_n = (A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n)^T$ tartibida joylashtirilsa, $n \geq 1$ uchun sakkiz noma’lumli sistema hosil bo‘ladi:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{B}_{en}^h(b) & -\mathrm{B}_{sn}^j(b) & -\mathrm{B}_{sn}^y(b) & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_{sn}^j(a) & \mathrm{B}_{sn}^y(a) & -\mathrm{B}_{fn}^j(a) \end{bmatrix} \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} -\mathbf{Y}_n^{\mathrm{inc}}(b) \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Sistema matritsasi $\mathsf{M}_n(\omega)$ bilan belgilanadi. Bu yerda h yuqori indeksi $h_n^{(1)}$ bazisini, $\mathbf{Y}_n^{\text{inc}} = \left(U_n^{\text{inc}}, V_n^{\text{inc}}, R_n^{\text{inc}}, T_n^{\text{inc}}\right)^T$ esa ma'lum tushuvchi holatni bildiradi. $n = 0$ da burchak hosilasi nol: ko'ndalang potensial maydonga hissa qo'shmaydi. Shuning uchun V_n, T_n qatorlari va S-ustunlari chiqarilib, 4×4 radial sistema yechiladi. Bu alohida ajratish sun'iy singulyarlikning oldini oladi.

Nostatsionar javobni tiklash

Tushuvchi potensialning koordinata boshiga ekstrapolyatsiya qilingan vaqt signali $s(t)$, uning spektri $\hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\,(t) e^{i\omega t} dt$ bo'lsin. Birlik tushuvchi potensialga javob $\mathcal{H}$ (9) orqali topilgach:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\,(\mathbf{x}, \omega) \hat{s}(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega. \qquad (10)$$

Sababiy kirish va boshlang'ich tinch holat olinadi; manfiy chastotalar haqiqiy signalga mos kompleks qo'shma simmetriya bilan to'ldiriladi. Spektral tiklash g'oyasi [2] da ham qo'llangan. Amaliy hisobda qator kesimi va chastota qadami javobning yaqinlashuvi orqali tanlanishi lozim.

Natijalar.

Relaksatsion yo'qotishning chastotaviy qonuniyati

(3) ni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratib, $M_e^* = M' - iM''$ hamda $x = \omega\tau_M$ belgilashlari bilan quyidagini olamiz:

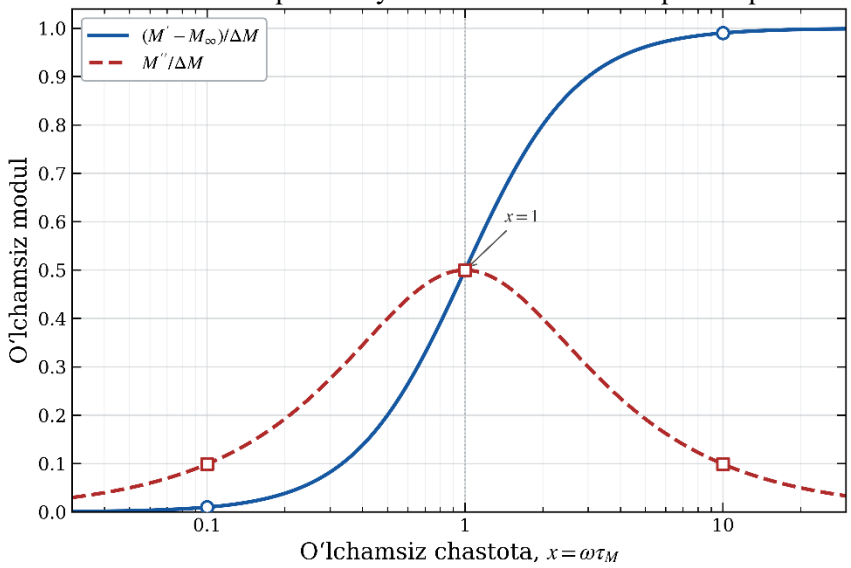
$$M' = M_\infty + \Delta M \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad M'' = \Delta M \frac{x}{1+x^2}, \qquad \frac{dM''}{dx} = \Delta M \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. \qquad (11)$$

$\Delta M > 0$ bo'lganda yo'qotish moduli $x = 1$ da $M''_{\max} = \Delta M/2$ qiymatga yetadi. Past chastotada $M' \to M_\infty$, yuqori chastotada $M' \to M_0$. Quyidagi qiymatlar bevosita (11) dan hisoblangan bo'lib, material sinovi yoki qobiq difraksiyasining sonli natijalari emas.

1-jadval. Relaksatsiya modulining o'lchamsiz qiymatlari ($\Delta M > 0$)

$x = \omega\tau_M$	$(M' - M_\infty)/\Delta M$	$M''/\Delta M$
0,1	0,0099	0,0990
1	0,5000	0,5000
10	0,9901	0,0990

Demak, o'zgarmas chastotada relaksatsiya vaqtini oshirish yo'qotish modulini avval oshirib, keyin kamaytiradi. Ushbu maksimumni so'nish tangensi M''/M' maksimumi yoki qobiq amplitudasi minimumi bilan tenglashtirish mumkin emas: ular boshqa funksiyalar va turli shartlar orqali aniqlanadi.



2-rasm. Relaksatsiya modulining o'lchamsiz qiymatlari ($\Delta M > 0$)

To'ldiruvchining radial dinamik qattiqligi

Sferik-simmetrik $n = 0$ modada markazda chekli ko'chish $U_f(r) = c\, j_1(k_{Pf} r)$ ko'rinishga ega; c — ixtiyoriy amplituda. $j_1{}'(z) = j_0(z) - 2j_1(z)/z$ ayniyatidan foydalanib, $r = a$ da kuchlanishning ko'chishga nisbati topiladi:

$$\kappa_f(\omega) := \frac{R_f(a)}{U_f(a)} = L_f k_{Pf} \frac{j_0(k_{Pf}a)}{j_1(k_{Pf}a)} - \frac{4G_f}{a}, \qquad L_f = K_f + \frac{4}{3}G_f. \qquad (12)$$

Formula $U_f(a) \neq 0$ bo‘lgan holatlar uchun yozilgan. κ_f tezlikka emas, ko‘chishga nisbatan aniqlangan dinamik qattiqlikdir; birligi Pa/m. $z = k_{Pf}a \ll 1$ da $j_0(z)/j_1(z) = 3/z - z/5 + O(z^3)$ bo‘lgani uchun:

$$\kappa_f(\omega) = \frac{3K_f}{a} - \frac{\rho_f a}{5}\omega^2 + O\left(\frac{L_f}{a}\left(k_{Pf}a\right)^4\right). \qquad (13)$$

Bu natijada $3K_f/a$ to‘ldiruvchining hajmiy elastik qarshiligini, $\rho_f a/5$ esa ichki sirt birligiga keltirilgan inertsiya koeffitsiyentini ifodalaydi. Shunday qilib, past chastotali radial harakatda to‘ldiruvchi ham qattiqlik, ham massa qo‘shadi. (13) butun qobiqning tayyor rezonans formulasi emas; u (9) dagi ichki chegaraning fizik mazmunini ochib beradi.

Chegaraviy holatlar

Analitik tekshiruvda $\Delta K = \Delta G = 0$ bo‘lsa, tashqi muhit elastik holatga o‘tadi va material yo‘qotishi yo‘qoladi, lekin nurlanish orqali energiya chiqishi saqlanadi. Barcha sohalarning zichliklari va elastik modullari bir xil bo‘lsa, chegaralar fizik jihatdan yo‘qoladi: $A_n = B_n = 0$, sochilgan maydon nol bo‘ladi. $n = 0$ da S-maydonning yo‘qligi esa radial simmetriyaning bevosita natijasidir. Ushbu holatlar kelajakdagi sonli realizatsiya uchun tekshiruv mezonlarini beradi.

Olingan model qobiq, ichki to‘ldiruvchi va tashqi muhitning ta’sirini bir xil chegaraviy shartlar tizimida bog‘laydi To‘ldiruvchini faqat qo‘shimcha massa bilan almashtirish (13) dagi hajmiy qattiqlikni yo‘qotadi. Shu sababli to‘ldiruvchi qo‘shilganda rezonans chastotasi albatta pasayadi degan xulosa umumiy holda asosli emas: siljish yo‘nalishi qattiqlik va inertsiya o‘zgarishlarining nisbatiga bog‘liq. Bundan tashqari, (13) faqat $n = 0$ va $|k_{Pf}a| \ll 1$ uchun amal qiladi; yuqori modalar va ichki rezonanslarda to‘liq (9) sistema zarur.

Qovushqoq-elastiklikning ikki ta’siri ajratilishi kerak. Kompleks modulning haqiqiy qismi to‘lqin tezligi va dinamik qattiqlikni, yo‘qotish qismi esa materialdagi energiya dissipatsiyasini belgilaydi. Izolyatsiyalangan rezonans yaqinida, boshqa omillar deyarli o‘zgarmaganda, yo‘qotishning ko‘payishi odatda cho‘qqini pasaytiradi. Biroq butun chastota oralig‘ida sirt amplitudasining monoton kamayishi kafolatlanmaydi: faza, moda almashinuvi va interferensiya ham o‘zgaradi. Relaksatsiya vaqtini tanlashda faqat bitta chastotadagi modul qiymati yetarli emas.

Garmonik masalada bitta chastotaning amplitudasi va fazasi o‘rganiladi; nostatsionar javob esa (10) bo‘yicha barcha muhim spektral komponentlarning yig‘indisidir. Impuls davomiyligi qisqarganda uning spektri odatda kengayadi, ammo eng katta kuchlanishning oshishi kirish signallari qanday normallanganiga ham bog‘liq. Bir xil maksimal amplituda, bir xil impuls yoki bir xil energiya bilan berilgan yuklar o‘zaro aynan teng ta’sirlar emas. Shuning uchun davomiylikning ta’sirini baholashdan oldin taqqoslash mezoni belgilanishi lozim.

Rezonansni tahlil qilishda $\det \mathsf{M}_n(\omega) = 0$ sharti sababiy davom ettirilgan kompleks chastota tekisligidagi erkin, tashqariga nurlanuvchi modalar bilan bog‘lanadi. Real chastotadagi majburiy javob cho‘qqisi determinantning aniq noliga teng bo‘lishi shart emas. Hisoblashda o‘lchamsizlashtirilgan matritsaning eng kichik singulyar qiymati va kuzatilayotgan amplitudani birgalikda baholash maqsadga muvofiq. Birgina determinant modulini solishtirish bazis va o‘lchov birliklariga sezgir bo‘lishi mumkin.

Ishning cheklovi – fizik parametrlar bo‘yicha hisoblangan difraksiya diagrammalari va mustaqil tajriba tekshiruvining mavjud emasligidir. Keyingi bosqichda radiuslar, zichliklar, elastik modullar, relaksatsiya vaqtlari va kirish signali aniq berilib, qator hamda spektr kesimining yaqinlashuvi tekshirilishi kerak. Mazkur maqoladagi natijalar shu hisoblarning nazariy asosini tashkil qiladi.

Xulosa. Elastik to‘ldiruvchili sferik qobiqning qovushqoq-elastik muhitdagi difraksiya masalasi har bir $n \geq 1$ garmonika uchun sakkizta, $n = 0$ uchun to‘rtta noma’lumli sistemaga keltirildi. Garmonik va nostatsionar javoblar spektral tiklash orqali bog‘landi. Standart chiziqli modelda yo‘qotish modulining maksimumi $\omega\tau_M = 1$ da yuz berishi, radial to‘ldiruvchi esa past chastotada $3K_f/a$ qattiqlik va $\rho_f a/5$ inertsiya hissalarini berishi ko‘rsatildi. Natijalar relaksatsiya hamda to‘ldiruvchi ta’sirini alohida va izchil talqin qilish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Korneev V. A., Johnson L. R. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion—I. Theory and numerical results. Geophysical Journal International. 1993. 115(1). 230–250. doi:10.1111/j.1365-246X.1993.tb05601.x.

2. Klaseboer E., Sun Q. Analytical solution for a vibrating rigid sphere with an elastic shell in an infinite linear elastic medium. International Journal of Solids and Structures. 2022. 239–240. 111448. doi:10.1016/j.ijsolstr.2022.111448.

3. Safarov I. I., Teshaev M. Kh. Unsteady motions of spherical shells in a viscoelastic medium. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2023. 83. 166–179. doi:10.17223/19988621/83/14.

4. Hao Q., Greenhalgh S. The generalized standard-linear-solid model and the corresponding viscoacoustic wave equations revisited. Geophysical Journal International. 2019. 219(3). 1939–1947. doi:10.1093/gji/ggz407.

5. NIST. Digital Library of Mathematical Functions. §10.60: Sums, equation 10.60.7. https://dlmf.nist.gov/10.60.E7. Murojaat sanasi: 03.09.2026.